

第二节 全排列及其逆序数

- 一、概念的引入
- 二、全排列及其逆序数
- 三、小结 思考题

一、概念的引入

引例 用1、2、3三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解

	1	2	3	
百位	<input type="text" value="1"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text" value="2"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text" value="3"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	3种放法
十位	<input type="text" value="1"/> <input type="text" value="2"/> <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> <input type="text" value="3"/> <input type="text"/>		2种放法
个位	<input type="text" value="1"/> <input type="text" value="2"/> <input type="text" value="3"/>			1种放法

共有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 种放法。

上页

下页

返回

二、全排列及其逆序数

问题 把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

定义 把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（或排列）。

n 个不同的元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示。

由引例 $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 。

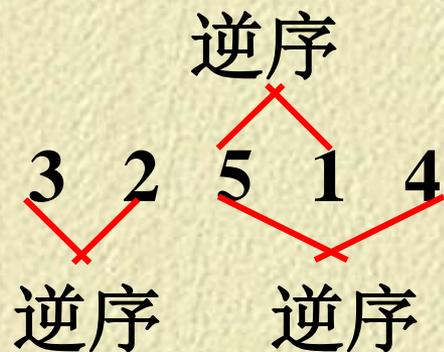
同理 $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ 。

排列的逆序数

我们规定各元素之间有一个标准次序， n 个不同的自然数，规定由小到大为**标准次序**。

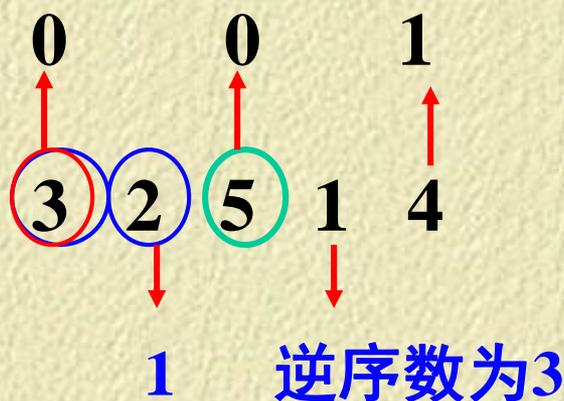
定义 在一个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$ 中，若数 $i_t > i_s$ 则称这两个数组成一个逆序。

例如 排列32514 中，



定义 一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

例如 排列32514 中,



故此排列的逆序数为 $3+1+0+1+0=5$.

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

计算排列逆序数的方法

方法1

分别计算出排在 $1, 2, \dots, n-1, n$ 前面比它大的数码之和即分别算出 $1, 2, \dots, n-1, n$ 这 n 个元素的逆序数，这个元素的逆序数的总和即为所求排列的逆序数。

方法2

分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即算出排列中每个元素的逆序数，这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数。

例1 求排列32514的逆序数。

解 在排列32514中，

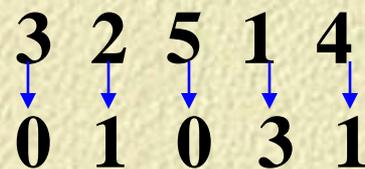
3排在首位,逆序数为0;

2的前面比2大的数只有一个3,故逆序数为1;

5的前面没有比5大的数,其逆序数为0;

1的前面比1大的数有3个,故逆序数为3;

4的前面比4大的数有1个,故逆序数为1;



于是排列32514的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5.$$

例2 计算下列排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性.

(1) 217986354

解

2	1	7	9	8	6	3	5	4
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	0	0	1	3	4	4	5

$$t = 5 + 4 + 4 + 3 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0$$
$$= 18$$

此排列为偶排列.

$$(2) \quad n(n-1)(n-2)\cdots 321$$

解

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 321}_{(n-2)}^{n-1}$$

$$\begin{aligned} t &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}, \end{aligned}$$

当 $n = 4k, 4k + 1$ 时为偶排列;

当 $n = 4k + 2, 4k + 3$ 时为奇排列.

$$(3) \quad (2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$$

解

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 (2k) & 1 & (2k-1) & 2 & (2k-2) & 3 & (2k-3) & \cdots & (k+1) & k \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & & & \cdots & & k
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 t &= 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (k-1) + (k-1) + k \\
 &= \frac{[2(1+k-1)(k-1)]}{2} + k = k^2,
 \end{aligned}$$

当 k 为偶数时，排列为偶排列，

当 k 为奇数时，排列为奇排列。

三、小结

- 1 n 个不同的元素的所有排列种数为 $n!$.
- 2 排列具有奇偶性.
- 3 计算排列逆序数常用的方法有2种.

思考题

分别用两种方法求排列16352487的逆序数.

上页

下页

返回

思考题解答

解 用方法1

1 6 3 5 2 4 8 7

$$t = 0 + 3 + 1 + 2 + 1 + 0 + 1 + 0 = 8$$

用方法2 由前向后求每个数的逆序数.

$$t = 0 + 0 + 1 + 1 + 3 + 2 + 0 + 1 = 8.$$