

自动倒车策略

摘要

本文针对车辆与车位垂直的任意位置,参照对于目前针对自动泊车系统的研究,考虑到生活中的实际情况,对于整个倒车过程的规律进行深入分析,采用几何学相关知识简化车辆模型和倒车过程。在简化的几何的车辆运动学模型下,根据泊车点附近的安全行驶范围、停靠位置和避障要求,列出约束条件,进而构建多目标非线性规划模型,通过 Matlab 软件的求解,解决理想倒车起始点和最佳泊车策略。

针对问题一,首先参考阿克曼转向几何,推导得出在倒车过程中,车速只影响车辆入库的时间,不会影响汽车的行驶轨迹,而行驶轨迹只与车辆的车长,车宽和转向角有关。由此,可以看成车辆在泊车时是以圆的轨迹在行驶,行车轨迹由一段圆弧组成,当车直行时可把车辆看作是做半径为无穷大的圆周运动。然后参考了生活中倒车实际情况的同时,结合题目信息和实际情况,将倒车的过程分为两种情况,第一种情况为车辆倒车起始点在车库左侧,为三段式倒车模式;第二种情况为车辆倒车起始点在车库右侧,车辆直接倒行垂直泊车。在两种情况下,分别建立笛卡尔坐标系,在不同情况的倒车过程中,我们以后轮车轴的中心点位置作为基点对车身各个点位置进行分析研究,将两种情况的倒车过程分阶段进行研究,得出各点的坐标和约束条件,然后借助 MATLAB 软件进行编程求解。得到当车辆到车库距离 $1119.5 \leq y < 3119.5$ 时,采用三段式倒车入库模式,理想起始点为 $(-500, 1119.5)$; 当 $3119.5 \leq y < 6619.5$ 时,采用直接垂直倒车入库模式,理想起始点为 $(3500, 3119.5)$; 在其他情况下,不满足安全行驶的约束条件。

针对问题二,首先根据问题一我们得出了分组后对应的理想起始点、前轮转向角、后轮轨迹长度和对应圆弧转过的角度,根据模型一在建立过程中得出的坐标关系方程,将理想起始点的坐标带入,运用 MATLAB 编程,求得小车子在每个阶段的坐标,从而得出车辆具体的泊车策略。对于理想起始点 $(-500, 1119.5)$, 求解得到的泊车策略为从初始点 $A_1(-500, 1119.5)$ 以 $R_1=3785$ 为半径转过 42.667 度到达 $A_2(2065.1, 2121.2)$, 再以 $R_2=3785$ 为半径转过 47.337 度到达 $A_3(845.1268, -662.1006)$, 然后垂直向后位移 3504.9 毫米到达 $A_4(845.1268, -4167)$ 完成倒车入库。车速为 10km/h , 两个前轮转角均为 36 度, 后轮行驶距离为 9450.4mm 。对于理想起始点 $(3500, 3119.5)$, 求解得到具体泊车策略为从初始点 $B_1(3500, 3119.5)$ 以 $R_3=3785$ 为半径转过 90 度到达 $B_3(-285.0386, -665.5386)$, 然后垂直向后位移 3202.1 毫米到达 $B_4(-285.0386, -3202.1)$ 完成倒车入库。车速为 10 km/h , 前轮转角为 36 度, 后轮行驶距离为 9147.6mm 。

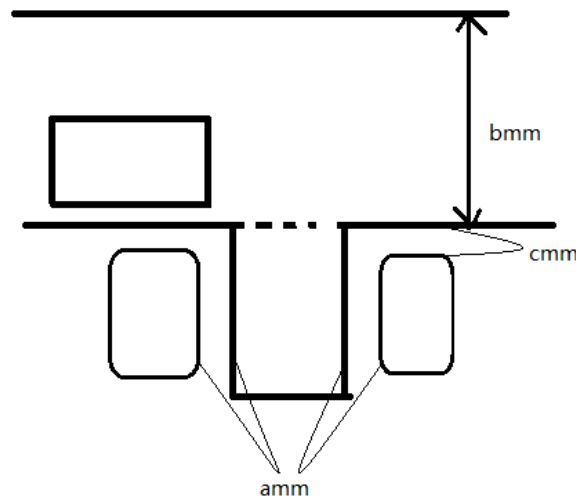
关键词: 自动垂直泊车, 多目标非线性约束, 阿克曼转向几何, MATLAB

1.问题重述

随着汽车产业及科技的高速发展,智能驾驶汽车成为了国内外公认的未来汽车重要发展方向之一。而在汽车智能化进程中,自动驾驶与自动泊车是一项非常具有挑战性和实用性的技术。其中自动泊车系统可通过各类传感器获取车位相对汽车的距离,通过控制汽车前轮转角和瞬时速度控制车辆行驶。

若考虑系统控制容易性,参考人工倒车入库,当车辆位于与车位垂直的任意位置时,先通过前行或后退到达理想停车起始点后,再确定前进转角和后退转角,使车身与车位在同一直线上后,直接倒车完成入库,即“一进二退”。这种两段式倒车模式提高了泊车过程中车辆行驶的紧凑性,同时减少了泊车行驶空间。

考虑别克汽车公司的昂科威,长 4667mm,宽 1839mm,高度 1694 mm,轴距 2750mm,前轮距 1584 mm,后轮距 1588 mm,目标车库为小型汽车库尺寸大小长 6m,宽 2.5m,高度 2.8m,车库周围情况如图。



建立模型给出泊车策略,最终实现汽车自动、安全、快速的停车入库。

1) 建立模型,按照车辆与车位之间的距离把车辆位置进行分组,给出每一组对应的倒车理想起始点, $a=400\text{mm}$, $b=8000\text{mm}$, $c=300\text{mm}$ 。

2) 建立模型,给出由理想起始点到倒车入库的泊车策略,包括车速、前轮转角、后轮行驶距离。

2.模型假设

- (1) 假设汽车在自动泊车过程中不存在车轮打滑的情况;
- (2) 假设汽车在自动泊车的过程中没有其他正在行驶的汽车及行人干扰其倒车入库;
- (3) 假设汽车行驶时与墙应保持 $\delta=200\text{mm}$ 以上的安全距离;
- (4) 假设后车轴中点到车尾的距离为 800mm;
- (5) 假设汽车在进行转向的时候行驶的速度不给予考虑;
- (6) 假设汽车在运行的过程中为光滑的曲线;
- (7) 假设车辆前轮的最大转角为 36° 。

3. 符号说明

符号	意义	符号	意义
$V_1V_2V_3V_4$	分别表示车身前左、前右、后右和后左四个顶点	l_s	车位长度
$W_1W_2W_3W_4$	分别表示前左、前右、后右和后左四个车轮	w_s	车位宽度
l_v	表示车长	a	已经停放好的车辆车身车位两侧边界线之间的距离
w_v	车宽	b	表示通车道的宽度
t_f	车辆前轮距	c	已经停放好的汽车车身前沿与车位上边界线之间的距离
t_r	车辆后轮距	L_1L_2	分别表示通车道左右边界
δ	安全距离		

4.模型的建立与求解

4.1 问题一的模型建立与求解

4.1.1 问题一的分析

在问题一中，要求根据车辆与车位之间的距离将车辆的位置进行分组，然后求出每一组对应的倒车理想起始点。首先我们对于车辆和车位的模型进行简化，然后基于阿克曼转向几何建立车辆在自动泊车过程中的简化的几何的运动学模型[1]，分析车辆倒车过程。

首先对于车身和车位进行简化，对于泊车过程，车身尺寸及轮轴的构造等静态参数，泊车时周围的环境参数如车位位置大小，周围障碍物位置，对于整个泊车过程具有直接影响。为了更加便于分析和理解泊车过程，我们建立如图 5.1 和

5.2 所示的简化的车辆和车位模型，忽略车辆边界的轮廓形状，只对于车辆的运动学相关特性进行考虑，把车辆视为前轮可自由转向的矩形刚体，仅考虑目标车位周围的障碍物的最突出部分为边界，简化目标车位为矩形边框[2]。

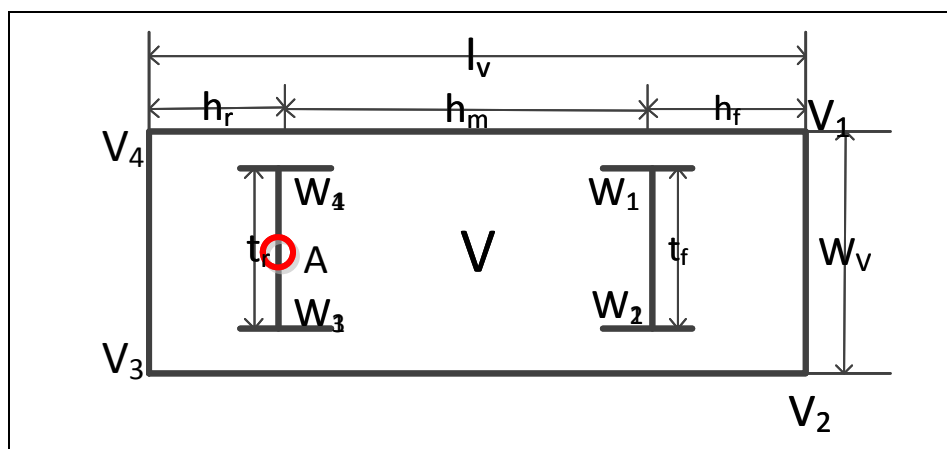


图 5.1 车身简化模型

图注： $V_1V_2V_3V_4$ 分别表示车身前左、前右、后右和后左四个顶点；

$W_1W_2W_3W_4$ 分别表示前左、前右、后右和后左四个车轮；

$l_v w_v$ 分别表示车长和车宽；

$h_f h_m h_r$ 分别表示前悬、轴距和后悬；

$t_f t_r$ 分别表示前轮距和后轮距。

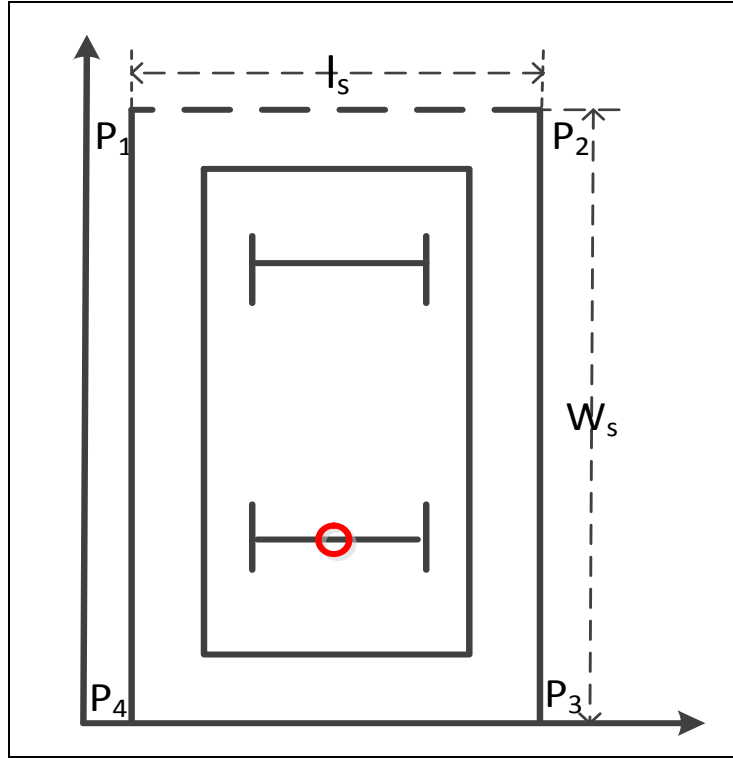


图 5.2 车位简化模型

图注： $P_1P_2P_3P_4$ 分别表示车位的四个角点；

l_s, w_s 分别表示车位长度和宽度。

根据阿克曼转向几何，阿克曼转角约等同于前轴中心转角 ϕ （左右两前轮转向角之差），转向中心 O 在后轴延长线，转向指向的一侧，如图 5.3 所示。然后基于图 5.3 所示的坐标系，认为车辆在行驶时间车辆不发生侧向滑动[3]，推导后轴中心的运动轨迹，并得出汽车运动学模型[4]。

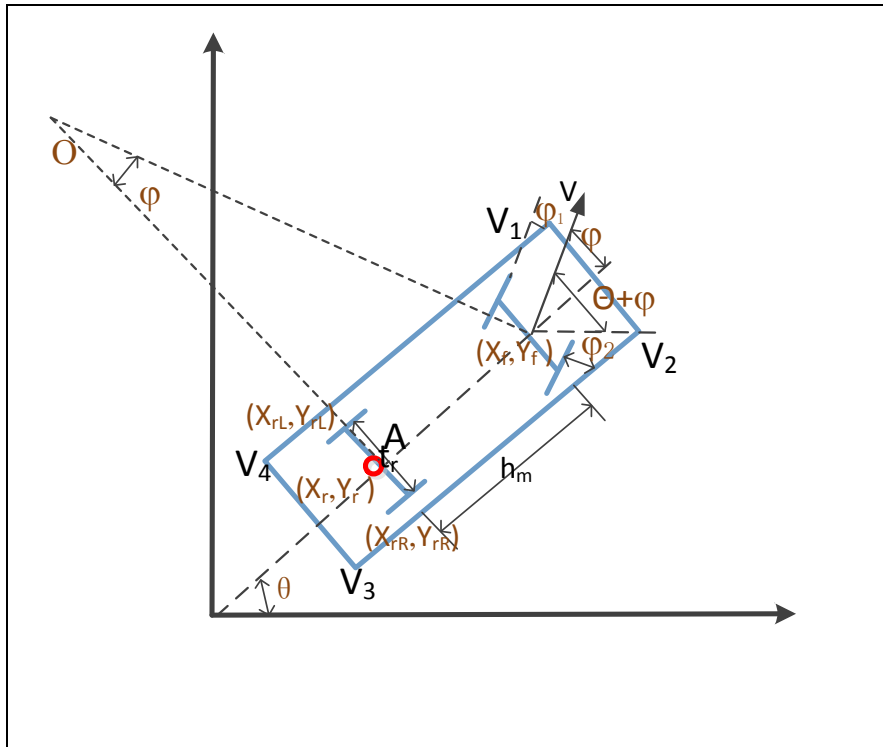


图 5.3 车辆运动学模型示意图

图注： (X_f, Y_f) 为前轴中心点坐标；

(X_r, Y_r) 为后轴中心点坐标；

A 指后轴中心点；

V 指前轴中心点的速度；

h_m 为轴距；

t_r 为后轮距；

φ 为前轴中心点转向角；

θ 为汽车中心轴与水平参考方向的夹角。

在低速泊车过程中，车速一般小于 5 km/h，我们通常忽略车轮滚动时的侧向滑动情况，认为后轮在运动时的轨迹在垂直方向上速度为 0，故可以列出以下方程式：

$$y'_r \cdot \cos \theta - x'_r \cdot \sin \theta = 0 \quad (4-1-1)$$

由图 5.3 所示，车辆前后轮是通过轴杆连在一起的，所以前后轴中心点位置坐标关系有：

$$\begin{cases} x_r = x_f - h_m \cdot \cos \theta \\ y_r = y_f - h_m \cdot \sin \theta \end{cases} \quad (4-1-2)$$

两边同时求导，可以得到其速度关系为：

$$\begin{cases} x'_r = x'_f + \theta' \cdot h_m \cdot \sin \theta \\ y'_r = y'_f - \theta' \cdot h_m \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (4-1-3)$$

由公式 4-1-3 和公式 4-1-1 可得关系式：

$$x'_f \cdot \sin \theta - y'_f \cdot \cos \theta + \theta' \cdot h_m = 0 \quad (4-1-4)$$

前轮轴线中心点处的 x , y 方向速度为：

$$\begin{cases} x'_f = v \cdot \cos(\theta + \varphi) \\ y'_f = v \cdot \sin(\theta + \varphi) \end{cases} \quad (4-1-5)$$

由此将公式 4-1-5 代入式公式 4-1-4，得前车轮旋转角速度为：

$$\theta' = v \cdot \frac{\sin \varphi}{h_m} \quad (4-1-6)$$

式 4-1-6 按时间积分得：

$$\theta = v \cdot \frac{\sin \varphi}{h_m} \cdot t + \theta_0 \quad (4-1-7)$$

将公式 4-1-5、4-1-6 代入公式 4-1-3 得到基于后轮轴线中心坐标的车辆运动学方程，其中间点在 x 、 y 方向的速度分别为：

$$\begin{cases} x'_r = v \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \\ y'_r = v \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (4-1-8)$$

将式 4-1-7 带入 4-1-8，然后对时间进行积分，得到后轮轴线中心坐标的参数轨迹方程：

$$\begin{cases} x_r(t) = h_m \cdot \cot \varphi \cdot \sin\left(\frac{v \cdot \sin \varphi}{h_m} \cdot t + \theta_0\right) + a \\ y_r(t) = -h_m \cdot \cot \varphi \cdot \cos\left(\frac{v \cdot \sin \varphi}{h_m} \cdot t + \theta_0\right) + b \end{cases} \quad (4-1-9)$$

其中：

$$\begin{cases} a = -h_m \cdot \cot \varphi \cdot \sin \theta_0 \\ b = h_m \cdot \cot \varphi \cdot \cos \theta_0 \end{cases} \quad (4-1-10)$$

从而推出得到后轮轴线中心的运动轨迹：

$$(x_r - a)^2 + (y_r - b)^2 = (h_m \cdot \cot \varphi)^2 \quad (4-1-11)$$

同理，可以推出左后轮的运动轨迹方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{rL}(t) = (h_m \cdot \cot \varphi - \frac{t_r}{2}) \cdot \sin(\frac{v \cdot \sin \varphi}{h_m} \cdot t + \theta_0) + a_L \\ y_{rL}(t) = -(h_m \cdot \cot \varphi - \frac{t_r}{2}) \cdot \cos(\frac{v \cdot \sin \varphi}{h_m} \cdot t + \theta_0) + b_L \\ a_L = -h_m \cdot \cot \varphi \cdot \sin \theta_0 = a \\ b_L = h_m \cdot \cot \varphi \cdot \cos \theta_0 = b \\ (x_{rL} - a)^2 + (y_{rL} - b)^2 = (h_m \cdot \cot \varphi - \frac{t_r}{2})^2 \end{array} \right. \quad (4-1-12)$$

右后轮的运动轨迹方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{rR}(t) = (h_m \cdot \cot \varphi + \frac{t_r}{2}) \cdot \sin(\frac{v \cdot \sin \varphi}{h_m} \cdot t + \theta_0) + a_R \\ y_{rR}(t) = -(h_m \cdot \cot \varphi + \frac{t_r}{2}) \cdot \cos(\frac{v \cdot \sin \varphi}{h_m} \cdot t + \theta_0) + b_R \\ a_R = -h_m \cdot \cot \varphi \cdot \sin \theta_0 = a \\ b_R = h_m \cdot \cot \varphi \cdot \cos \theta_0 = b \\ (x_{rR} - a)^2 + (y_{rR} - b)^2 = (h_m \cdot \cot \varphi + \frac{t_r}{2})^2 \end{array} \right. \quad (4-1-13)$$

向量 $(x, y, \varphi, \theta, v)$ 指汽车的位姿（指汽车的横纵坐标、转向角、航向角和速

率），由式 4-1-11 知，后轴中心的速度轨迹是以 (a, b) 为圆点， $h_m \cdot \cot \varphi$ 为半径的圆，速度并不影响轨迹。由于是后轮驱动的汽车，车身的运动轨迹与后轮的运动轨迹相同，车速只影响车辆入库的时间，不会影响汽车的行驶轨迹，而行驶轨迹只与车辆的车长，车宽和转向角有关。由此，可以看成车辆在泊车时是以圆的轨迹在行驶，行车轨迹由一段圆弧组成，当车直行时可把车辆看作是做半径为无穷大的圆周运动。

由以上的分析可知汽车的运行轨迹可以看成是由多段标准圆弧组成的轨迹序列，参考了生活中倒车实际情况的同时，结合题目信息和实际情况，将倒车的过程分为两种情况，第一种情况为车辆倒车起始点在车库左侧，为三段式倒车模式；第二种情况为车辆倒车起始点在车库右侧，车辆直接倒行垂直泊车，如图 5.4 和图 5.5 所示。

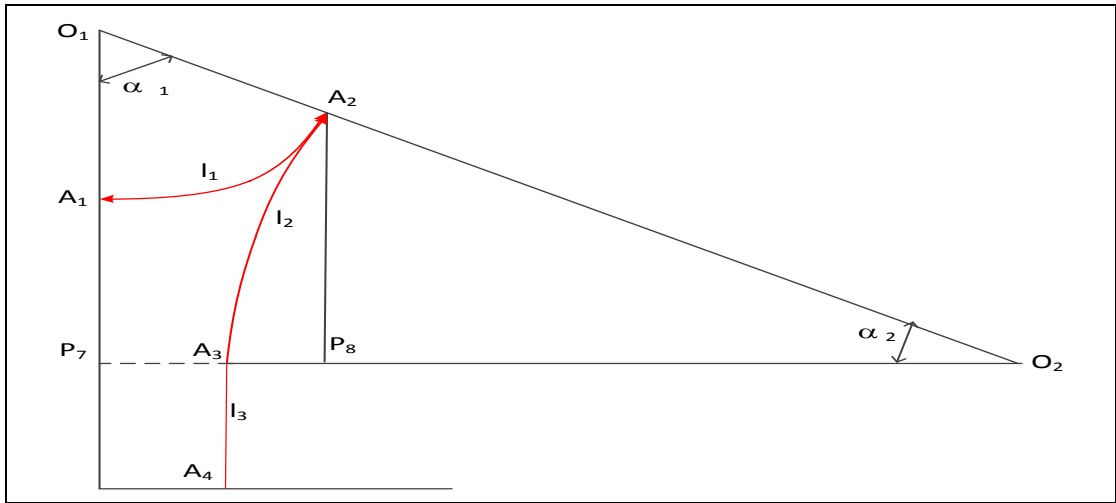


图 5.4 三段垂直泊车简化示意图

图注： O_1O_2 分别表示在第一次转向阶段和第二次转向阶段的圆心；

$\alpha_1\alpha_2$ 分别表示第一和第二阶段对应的转角度数；

$l_1l_2l_3$ 分别表示三个阶段的行驶路径。

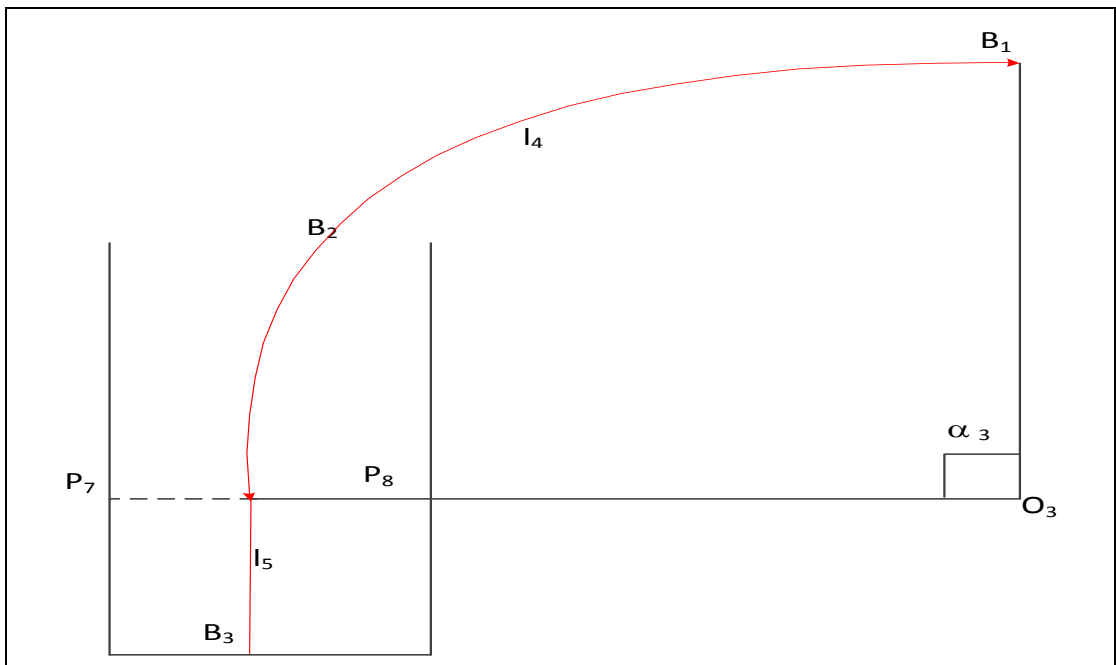


图 5.5 直接倒行垂直泊车简化示意图

图注： O_3 分别表示在转向阶段的对应圆弧的圆心；

$\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ 分别表示转向阶段转角度数；

l_4, l_5 分别表示两个个阶段的行驶路径。

由此我们将问题一的解决分为两种情况，即三段式垂直倒车模式和直接倒行垂直泊。

1.对于第一种情况，即三段式垂直倒车模式，其分为三个阶段：

(1) 第一次转向阶段（前进转向阶段）

在这一阶段，汽车从 A_1 点开始以固定转向角向前转向，然后到达第一个转点 A_2 。其行驶轨迹为一段圆弧。 A_2 点处汽车的相关参数可通过行驶距离求得。

(2) 第二次转向阶段（后退转向阶段）

在这一阶段，汽车从 A_2 开始以固定转向角向后转向，然后到达第二个转点 A_3 。其行驶轨迹为一段圆弧。 A_3 点处汽车的相关参数可通过行驶距离求得

(3) 倒车入库阶段（直线倒车阶段）

到达 A_3 点后，车身与车位已在一条直线上，直接倒车入库即可。

2.对于第二阶段，即直接倒行垂直泊车，其分为两个阶段：

(1) 第一次转向阶段（后退转向阶段）

在这一阶段，汽车从 B_1 点开始以固定转向角向后转向，然后到达第一个转点 B_2 ，其行驶轨迹为一段圆弧，转过的角度 $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ 。

(2) 到达 B_3 点后，车身与车位已在一条直线上，直接倒车入库即可。

4.1.2 模型一的建立

根据汽车转弯时的路径特点可知其轨迹圆弧必为圆的一部分，设转向角为 φ ，根据几何关系可得，后轮中点的轨迹应为 $R = L \cot \theta$ 圆的一部分。

因此汽车运行状态可以通过计算得到。假设 (x_r, y_r) 分别表示行驶过程中汽车后轮轴中点的位置， θ 为车身与水平轴夹角（取逆时针为正），根据图5.3建立的坐标系，可以知道汽车各主要点的坐标分别为：

$$\begin{aligned}
 V_1 &: (x_r + |AV_1| \cdot \cos(\theta + \beta_1), y_r + |AV_1| \cdot \sin(\theta + \beta_1)) \\
 V_2 &: (x_r + |AV_1| \cdot \cos(\theta - \beta_1), y_r + |AV_1| \cdot \sin(\theta - \beta_1)) \\
 V_3 &: (x_r + |AV_4| \cdot \cos(\pi - \theta - \beta_2), y_r - |AV_4| \cdot \sin(\pi - \theta - \beta_2)) \\
 V_4 &: (x_r - |AV_4| \cdot \cos(\theta - \beta_2), y_r - |AV_4| \cdot \sin(\theta - \beta_2))
 \end{aligned} \tag{4-2-1}$$

其中 $|AV_1|$, $|AV_4|$ 分别表示后轴中点到车身后左顶点 V_1 和后左顶点 V_4 的距离; β_1 是后轴中点与车身后左顶点 V_1 连线与车身中轴的夹角, β_2 后轴中点与车身后左顶点 V_4 连线与车身中轴的夹角 V_4 。即

$$|AV_1| = \sqrt{\left(\frac{W_v}{2}\right)^2 + (l_v - h_r)^2} \quad |AV_4| = \sqrt{\left(\frac{W_v}{2}\right)^2 + h_r^2} \quad \tan \beta_1 = \frac{\frac{W_v}{2}}{l_v - h_r} \quad \tan \beta_2 = \frac{\frac{W_v}{2}}{h_r}$$

1.对于第一种情况

即三段式垂直倒车模式, 我们建立如图5.6所示的坐标系:

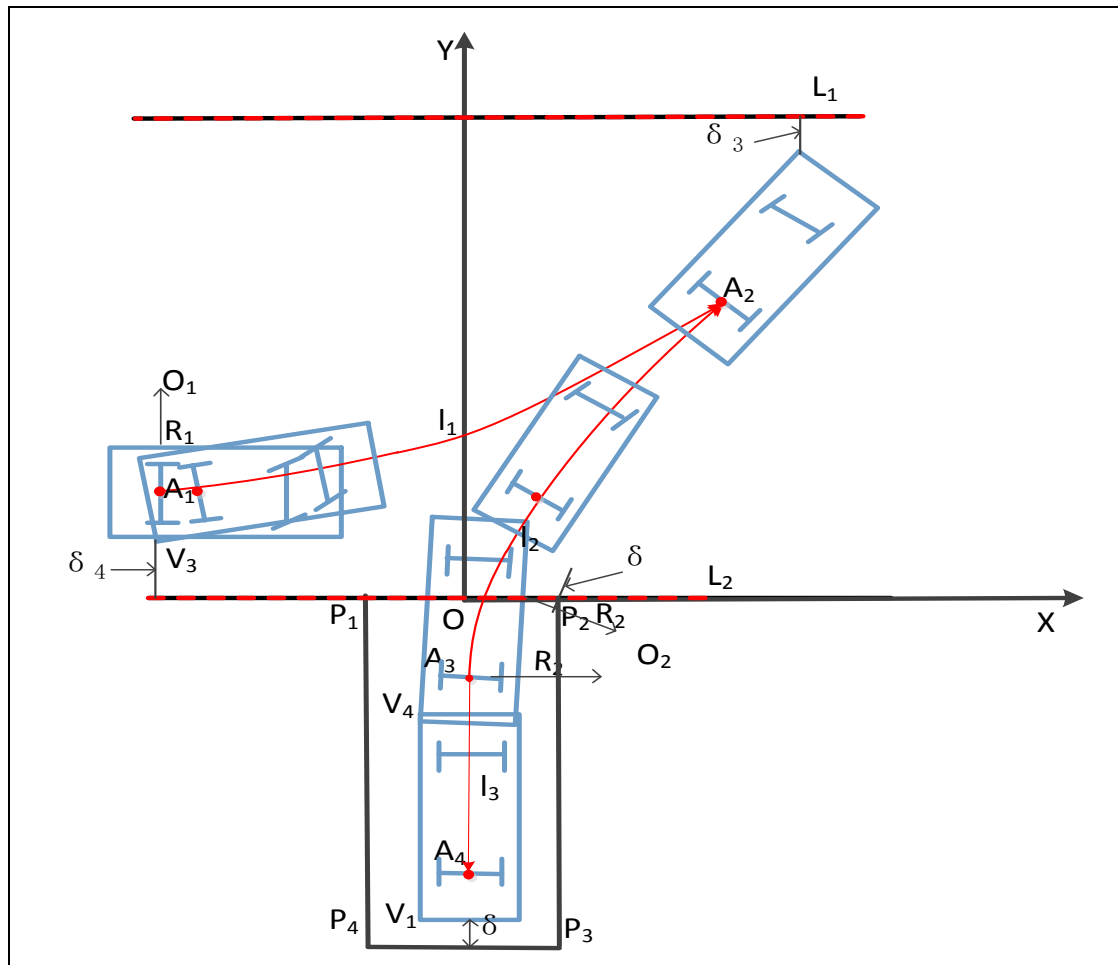


图5.6 垂直泊车避障示意图

图注: $R_1 R_2$ 分别表示第一段和第二段的形式轨迹的半径;

δ 分别表示所在位置的安全距离;

$L_1 L_2$ 分别表示通车道左右边界。

如图5.6所示, 以 O 点为原点建立如图所示的坐标系。根据避障要求, 得出汽车在各点的约束条件。

(1) 汽车在 A_1 点时: 为保证安全, 汽车与墙之间应有足够的距离。此时 $\theta = 0^\circ$, 所以:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{r1} + \frac{W_v}{2} < b - \delta \\ y_{r1} - \frac{W_v}{2} > \delta \end{array} \right\} \quad (4-2-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{r2} = x_{r1} + R_1 \cdot \sin \alpha_1 \\ y_{r2} = y_{r1} + R_1 \cdot (1 - \cos \alpha_1) \\ \theta = \alpha_1 \end{array} \right\} \quad (4-2-3)$$

此时, 为保证安全, 汽车各边界与墙之间的距离必须大于200mm, 分析可得此时的危险点为 V_1, V_2 两点, 此时应该满足:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{V_1} < b - \delta \\ y_{V_2} > \delta \end{array} \right\} \quad (4-2-4)$$

(其中 y_{V_1}, y_{V_2} 分别为 V_1, V_2 的坐标), 即

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{r1} + |AV_1| \cdot \sin(\theta + \beta_1) < b - \delta \\ y_{r1} - |AV_4| \cdot \sin(\pi - \theta - \beta_2) > \delta \end{array} \right\} \quad (4-2-5)$$

同时在第二阶段车身的顶点不能越过车库边缘, 即 P_2 点, 此时车辆与 P_2 距离最近, 应满足:

$$R_2 - \frac{W_v}{2} - \delta > \sqrt{(x_{r2} + R_2 \cos \alpha_2 - \frac{l_s}{2})^2 + (y_{r2} - R_2 \sin \alpha_2)^2} \quad (4-2-6)$$

(3) 汽车从 A_2 点前进行驶到 A_3 点, 到达 $A_3(x_{r3}, y_{r3})$ 点时, 轨迹为以 O_2 为圆心, $R_2 = L \cot \theta_2$ 为半径的圆弧, θ_1 为汽车沿圆弧倒车时的前轮转角, 若轨迹圆弧对应的圆心角为 α_2 , 此时可得到,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 + \alpha_1 = \frac{\pi}{2} \\ x_{r3} = x_{r2} + R_2 \cdot (\cos \alpha_2 - 1) \\ y_{r3} = y_{r2} - R_2 \cdot \sin \alpha_2 \end{array} \right\} \quad (4-2-7)$$

应满足:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{r3} - \frac{W_v}{2} > -\frac{l_s}{2} + a \\ x_{r3} + \frac{W_v}{2} < \frac{l_s}{2} - a \end{array} \right\} \quad (4-2-8)$$

综上整理得到:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{r1} + \frac{W_v}{2} < b - \delta \\ y_{r1} - \frac{W_v}{2} > \delta \\ y_{r1} + R_1 \cdot (1 - \cos \alpha_1) + |AV_1| \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_1) < b - \delta \\ y_{r1} + R_1 \cdot (1 - \cos \alpha_1) - |AV_4| \cdot \sin(\pi - \alpha_1 - \beta_2) > \delta \\ R_2 - \frac{W_v}{2} - \delta > \sqrt{(x_{r2} + R_2 \cos \alpha_2 - \frac{l_s}{2})^2 + (y_{r2} - R_2 \sin \alpha_2)^2} \\ x_{r1} + R_1 \cdot \sin \alpha_1 + R_2 \cdot (\cos \alpha_2 - 1) - \frac{W_v}{2} > -\frac{l_s}{2} + a \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} x_{r1} + R_1 \cdot \sin \alpha_1 + R_2 \cdot (\cos \alpha_2 - 1) + \frac{W_v}{2} < \frac{l_s}{2} - a \\ |AV_1| = \sqrt{(\frac{W_v}{2})^2 + (l_v - h_r)^2} \\ |AV_4| = \sqrt{(\frac{W_v}{2})^2 + h_r^2} \\ \tan \beta_1 = \frac{\frac{W_v}{2}}{l_v - h_r} \\ \tan \beta_2 = \frac{\frac{W_v}{2}}{h_r} \\ \alpha_1, \alpha_2 \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ s \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{其中, } \begin{cases} R_1 = h_m \cdot \cot \varphi_1 \\ R_2 = h_m \cdot \cot \varphi_2 \end{cases}$$

$$\text{目标函数为: } \begin{cases} \min Z_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \\ \min Z_2 = R_1 \varphi_1 + R_2 \varphi_2 + s \end{cases} \quad (d \text{ 表示汽车在第三段倒车过程中后轮}$$

行驶的直线距离)

即在整个倒车过程中，最理想的倒车起始点对应的第一第二阶段的前轮转角之和应最小，行驶路径之和也应最小。

基于以上所建立的模型，我们看到，这是一个多目标的非线性规划问题，考虑到前轮转角和倒车过程中行驶距离的在整个倒车过程最优计算的过程中所占比例，我们将前轮转角的比重设为 20%，行驶路径之和所占比重设为 80%，从而将其转化为单目标非线性规划。即 $\min Z = 0.2Z_1 + 0.8Z_2$

2.对于第二种情况

即直接倒行垂直泊车模式，我们建立如图 5.7 所示的坐标系：

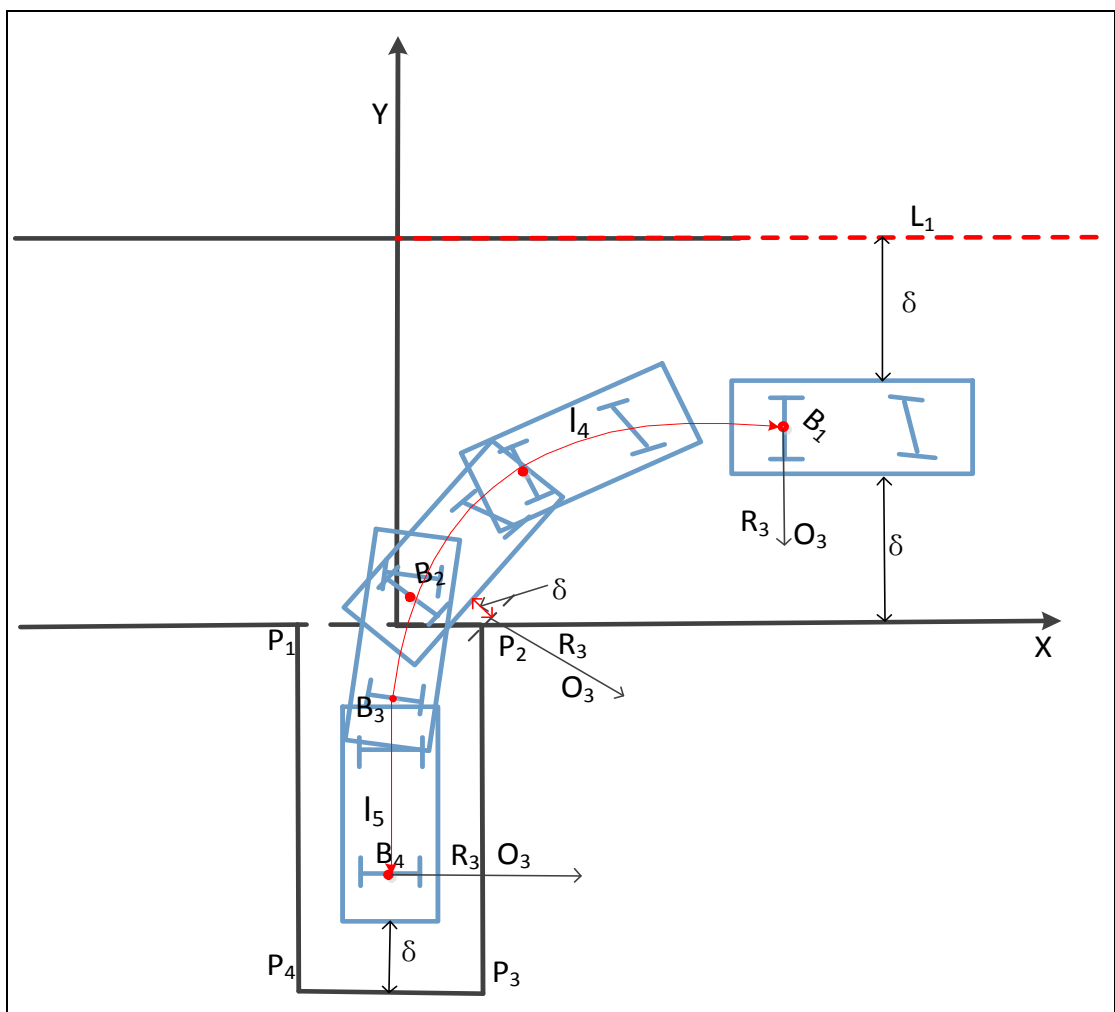


图 5.7 直接倒行垂直泊车避障示意图

图注： R_3 分别表示第一段行驶轨迹的半径；

δ 分别表示所在位置的安全距离；

$L_1 L_2$ 分别表示通车道左右边界。

(1) 汽车在 B_1 点时, 设其坐标为 (x_{r1}, y_{r1}) , 为保证安全, 汽车与墙之间应有足够的距离。此时 $\theta=0^\circ$, 所以:

$$\begin{cases} y_{r1} + \frac{W_v}{2} < b - \delta \\ y_{r1} - \frac{W_v}{2} > \delta \end{cases} \quad (4-3-1)$$

(2) 车辆从 B_1 到 B_2 时, 此时车辆右侧边界距车库右边界距离最短, 对于避障要求, 此时应满足:

$$R_3 - \sqrt{(x_{r1} - \frac{l_s}{2})^2 + (R_3 - y_{r1})^2} - \frac{W_v}{2} > \delta \quad (4-3-2)$$

(3) 车辆从 B_2 点前进行驶到 B_3 点, 到达 $B_3(x_{r3}, y_{r3})$ 点时, 轨迹为以 O_3 为圆心, $R_3 = L \cot \theta_3$ 为半径的圆弧, θ_3 为汽车沿圆弧前进时的前轮转角, 轨迹圆

弧对应的圆心角为 $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$, 此时可得到:

$$\begin{cases} x_{r3} = x_{r1} - R_3 \\ y_{r3} = y_{r1} - R_3 \end{cases} \quad (4-3-3)$$

此时, 为保证安全, 汽车各边界与墙之间的距离必须大于200mm, 分析可得此时的危险点应该满足:

$$\begin{cases} x_{r3} > R_3 + a - \frac{l_s}{2} \\ x_{r3} < R_3 + a - \frac{l_s}{2} \end{cases} \quad (4-3-4)$$

(3) 汽车从 B_3 点沿直线倒车行驶到 B_4 点, 到达 $B_4(x_{r4}, y_{r4})$ 点时, 为保证安全, 应满足:

$$\begin{cases} x_{r4} = x_{r3} \\ y_{r4} = y_{r3} - s \end{cases} \quad (4-3-5)$$

此时, 车辆距停车位边线的距离为 c , 应满足:

$$\begin{cases} y_{r4} - l_v + h_r = -c \\ y_{r1} = s + R_3 + l_v - h_r - c \\ s = l_s \\ s \geq 0 \end{cases} \quad (4-3-6)$$

综上整理得到：

$$s.t. \begin{cases} y_{r1} + \frac{W_v}{2} < b - \delta \\ y_{r1} - \frac{W_v}{2} > \delta \\ R_3 - \sqrt{(x_{r1} - \frac{l_s}{2})^2 + (R_3 - y_{r1})^2} - \frac{W_v}{2} > \delta \\ x_{r3} > R_3 + a - \frac{l_s}{2} \\ x_{r3} < R_3 + a - \frac{l_s}{2} \\ y_{r1} - R_3 - l_v + h_r + c \geq 0 \end{cases}$$

其中， $R_3 = h_m \cdot \cot \varphi_3$ ， φ_3 为前轮转向角。

目标函数为：
$$\begin{cases} \min Z_3 = \varphi_3 \\ \min Z_4 = R_1 \varphi_1 + R_2 \varphi_2 + s \end{cases}$$
 (d 表示汽车在第三段倒车过程中后

轮行驶的直线距离)

即在整个倒车过程中，最理想的倒车起始点对应的前轮转角之和应最小，行驶路径之和也应最小。

同理，我们将前轮转角的比重设为 20%，行驶路径之和所占比重设为 80%，从而将其转化为单目标非线性规划。即 $\min Z = 0.2Z_3 + 0.8Z_4$

4.1.3 模型一的求解与分析

根据问题分析，我们可以看出这是一个多阶段决策问题，在分别满足三段式倒车入库模式和直接倒车入库的模式非线性约束条件的基础上，遍历寻找每个初始位置的最优解。

利用 MATLAB 编程求解，并将结果导入 EXCEL 中进行汇总，得到部分结果如下表所示：

表 1-1

y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	z
3619.5	-8000	6.86E-02	0.574166	2.80E-01	1.291254	17550.22
3619.5	-7500	6.88E-02	0.599173	2.65E-01	1.305938	16892.71
3619.5	-7000	6.85E-02	0.62585	2.48E-01	1.322768	16240.16
3619.5	-6500	1.15E-01	0.62832	3.81E-01	1.19002	15638.52
3619.5	-6000	1.37E-01	0.62832	4.24E-01	1.146774	15112.51
3619.5	-5500	1.52E-01	0.62832	4.41E-01	1.12996	14596.34
3619.5	-5000	1.71E-01	0.62832	4.59E-01	1.11145	14069.99
3619.5	-4500	1.93E-01	0.62832	4.80E-01	1.090919	13531.75
3619.5	-4000	2.20E-01	0.62832	5.03E-01	1.067934	12979.43
3619.5	-3500	2.54E-01	0.62832	5.29E-01	1.041905	12410.15
3619.5	-3000	2.98E-01	0.62832	5.59E-01	1.011994	11819.95
3619.5	-2500	3.56E-01	0.62832	0.593851	0.976945	11203.19
3619.5	-2000	3.95E-01	0.564546	0.615092	0.955704	10925.66
3619.5	-1500	0.488713	0.509465	0.669806	0.90099	10355.5
3619.5	-1000	0.62832	0.464816	0.765152	0.805644	9760.439
3619.5	-500	0.62832	0.567421	0.568453	1.002343	8977.885
3619.5	0	0.62832	0.62832	0.391987	1.178809	8417.183
3619.5	3500	0.62832				7717.715
3619.5	4000	0.598804				7829.567
3619.5	4500	0.545597				8057.875
3619.5	5000	0.500321				8286.184
3619.5	5500	0.461475				8514.495
3619.5	6000	0.427876				8742.807
3619.5	6500	0.398591				8971.12
3619.5	7000	0.37288				9199.433
3619.5	7500	0.350156				9427.747
3619.5	8000	0.329947				9656.062

注：1.y = 3619.5

2.灰色部分为三段式倒车入库模式求解结果，绿色部分为直接垂直倒车入库模式求解结果。

3.红色字体为最小值(最优值)

4.完整数据见附录

将每个 y 的最小值进行汇总，得到如下结果：

表 1-2

y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	ψ_3	z
1119.5	-500	0.62832	0.62832	0.744617	0.82618		7560.591
1619.5	-1500	0.62832	0.62832	0.767288	0.803508		8054.773
2119.5	-1000	0.62832	0.62832	0.674805	0.895991		8085.156
2619.5	0	0.62832	0.62832	0.562296	1.008501		8090.271
3119.5	3500					0.62832	7317.715
3619.5	3500					0.62832	7717.715
4119.5	3500					0.62832	8117.715
4619.5	3500					0.62832	8517.715
5119.5	3500					0.62832	8917.715
5619.5	3500					0.62832	9317.715
6119.5	3500					0.62832	9717.715
6619.5	3500					0.62832	10117.71

对结果进行分析，可以看出，灰色部分的最优解为三段式求解结果，绿色部分为直接垂直倒车入库求解结果更优。由此我们按照车辆与车位之间的距离 y 将车辆进行分组，当 $1119.5 \leq y < 3119.5$ 时，采用三段式倒车入库模式，理想起始点为 $(-500, 1119.5)$ ；当 $3119.5 \leq y < 6619.5$ 时，采用直接垂直倒车入库模式，理想起始点为 $(3500, 3119.5)$ 。

4.2 问题二的模型建立与求解

4.2.1 问题二的分析

对于问题二的泊车策略，根据问题一，我们得出了分组后对应的理想起始点，然后根据模型一的建立过程，我们已经得出了各个阶段的各个点的位置坐标之间的关系，以及运动轨迹长度、前轮转向角和对应圆弧转过的角度。将理想起始点的坐标带入，根据已经得出的坐标之间关系从而得出车辆在各个位置下的状态，得出理想起始点倒车入库的泊车策略。

4.2.2 模型二的建立

根据问题一我们知道，对于车辆的倒车过程分为两种情况，即车辆倒车起始点在车库左侧，为三段式倒车模式；车辆倒车起始点在车库右侧，车辆直接倒行垂直泊车。

1. 车辆倒车起始点在车库左侧，三段式倒车模式

在图 5.6 建立的坐标系的基础上，我们将理想起始点的坐标设为 (x_0, y_0) ，则

可知在 A_1 点的坐标为 $\begin{cases} x_{r1} = x_0 \\ y_{r1} = y_0 \end{cases}$;

由问题一第一种情况模型的建立过程知，到达 A_2 点， A_2 的坐标为

$$\begin{cases} x_{r2} = x_{r1} + R_1 \cdot \sin \alpha_1 \\ y_{r2} = y_{r1} + R_1 \cdot (1 - \cos \alpha_1) \end{cases}, \text{ 由 } A_1 \text{ 到 } A_2 \text{ 的过程中, 前轮转角为 } \varphi_1, \text{ 所对应圆}$$

弧的半径为 $R_1 = h_m \cdot \cot \varphi_1$, 转过的角度为 α_1 , 对应的弧长 $l_1 = \alpha_1 \cdot R_1$;

$$\text{到达 } A_3 \text{ 时, 其坐标为 } \begin{cases} x_{r3} = x_{r2} + R_2 \cdot (\cos \alpha_2 - 1) \\ y_{r3} = y_{r2} - R_2 \cdot \sin \alpha_2 \end{cases}, \text{ 这一过程中前轮转角为 } \varphi_2,$$

所对应的圆弧的半径为 $R_2 = h_m \cdot \cot \varphi_2$, 转过的角度为 α_2 , 对应的弧长 $l_2 = \alpha_2 \cdot R_2$;

$$\text{到达 } A_4 \text{ 时, 对应的坐标为, } \begin{cases} x_{r4} = x_{r3} \\ y_{r4} = -(c + l_v - h_r) \end{cases}, \text{ 对应的倒车距离}$$

$l_3 = s = y_{r3} - y_{r4}$ 。

2. 车辆倒车起始点在车库右侧，车辆直接倒行垂直泊车。

在图 5.7 建立的坐标系的基础上，我们将理想起始点的坐标设为 (x_0, y_0) ，则

可知在 B_1 点的坐标为 $\begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = y_0 \end{cases}$;

由问题一第二种情况模型的建立过程知，到达 B_3 点， B_3 的坐标为

$$\begin{cases} x_{r3} = x_{r1} - R_3 \\ y_{r3} = y_{r1} - R_3 \end{cases}, \text{ 由 } B_1 \text{ 到 } B_3 \text{ 的过程中, 前轮转角为 } \varphi_3, \text{ 所对应圆弧的半径为}$$

$R_3 = h_m \cdot \cot \varphi_3$, 转过的角度为 $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$, 对应的弧长 $l_4 = \alpha_3 \cdot R_3$;

$$\text{到达 } B_4 \text{ 时, 对应的坐标为, } \begin{cases} x_{r4} = x_{r3} \\ y_{r4} = y_{r3} - s \end{cases}, \text{ 对应的倒车距离}$$

$l_5 = s = y_{r1} - R_3 - l_v + h_r + c$ 。

4.2.3 模型二的求解与分析

将第一个理想起始点 $(-500,1119.5)$ 带入模型二中三段式倒车入库模式，由模型一可知 $\varphi_1=0.62832$ ， $\varphi_2=0.62832$ ， $\alpha_1=0.744617$ ， $\alpha_2=0.82618$ 。求得 $A_1(-500,1119.5)$ ， $A_2(2065.1,2121.2)$ ， $A_3(845.1268, -662.1006)$ ， $A_4(845.1268, -4167)$ ， $B_1(845.1268, -4167)$ ， $R_1=3785$ ， $R_2=3785$ ， $l_1=2818.4$ ， $l_2=3127.1$ ， $l_3=3504.9$ 。即具体的泊车过程为首先从初始点 $A_1(-500,1119.5)$ 以 $R_1=3785$ 为半径转过 42.667 度到达 $A_2(2065.1,2121.2)$ ，再以 $R_2=3785$ 为半径转过 47.337 度到达 $A_3(845.1268, -662.1006)$ ，然后垂直向后位移 3504.9 毫米到达 $A_4(845.1268, -4167)$ 完成倒车入库。车速为 10km/h ，两个前轮转角均为 36 度，后轮行驶距离为 9450.4mm 。

将第二个起始点 $(3500,3119.5)$ 带入模型二中直接垂直倒车入库模式，由模型一可知 $\varphi_3=0.62832$ ， $\alpha_3=\frac{\pi}{2}$ 。求得 $B_1(3500,3119.5)$ ， $B_3(-285.0386, -665.5386)$ ， $B_4(-285.0386, -3202.1)$ ， $R_3=3785$ ， $l_4=5945.5$ ， $s=3202.1$ 。即具体泊车过程为首先从初始点 $B_1(3500,3119.5)$ 以 $R_3=3785$ 为半径转过 90 度到达 $B_3(-285.0386, -665.5386)$ ，然后垂直向后位移 3202.1 毫米到达 $B_4(-285.0386, -3202.1)$ 完成倒车入库。车速为 10 km/h ，前轮转角为 36 度，后轮行驶距离为 9147.6mm 。

5.模型的评价与推广

5.1 模型的评价

1.优点：（1）对于我们所建立的模型，是从生活中垂直倒车入库的实际情况出发研究的，能够较好的反映实际情况，客观合理。在此题中模型始终围绕 (x_0, y_0) 建立，约束条件和结果简洁明了。

（2）对于模型的建立，尽管约束条件很多，不等式较为复杂，但是我们克服了数据冗杂不易求解的缺点，采用数形结合的方法可以更好地建立模型和解决问题。

（3）建立最优泊车策略模型的目标函数较简洁，仅由路程和转向角度决定。

2.缺点：（1）在该问题中我们认为汽车的前轮在运行的过程中前轮不会发生

轴向移动,将汽车运动的路线看成了纯曲线运动即圆弧运动,这与汽车的实际运动曲线存在一定的差异,因此对结果也有一定的影响。

(2) 汽车的转角的度数在现实中也会受到汽车行驶速度的影响,而我们在解题的过程中忽略了汽车行驶速度对于汽车转角的影响,在此基础上也会对结果造成一定的差异。

(3) 在解题的过程中我们的最优目标只是考虑了路程最短和转向角度之和最小的这两个因素,而在实际中最优问题要受多个因素的限制,这样也会造成结果的差异。

5.2 模型的推广

本文所建立的多目标函数非线性规划模型,在科技研究,经济分析等方面具有一定的实效性。但是模型的结果存在一定的误差,不够全面。在时间充裕的条件下,应该综合多项指标,探求多方因素影响下、更具实际意义的模型,寻找更为简单准确的求解方法。

在现实生活中,泊车过程中往往会遭遇许多障碍物(建筑物、行人、土工构筑物等),如何在避开这些障碍物的情况下安全停车入库是更值得考虑和研究的问题。假设汽车传感器在倒车过程中探测到障碍物,则需先判断其是否在自己运行路线的安全距离内,若不在则允许无视,否则需重新制定泊车路线以避开障碍物(即增加新的约束条件)。若障碍物为行人则需先鸣笛并进行制动,使行人优先通过后再继续泊车。此处不做赘述。

6.参考文献

- [1]王芳成. 自动平行泊车系统的研究[D].中国科学技术大学,2010.
- [2]高航. 自动垂直泊车方法研究[D].中国科学技术大学,2011.
- [3] Thomas D.Gillespie.Fundamentals of Vehicle Dynamics[M]. Society of Automotive Engineers, Inc, 1992: 275-309.
- [4]任孝平,蔡自兴. 基于阿克曼原理的车式移动机器人运动学建模[J]. 智能系统学报,2009,06:534-537.

7.附录

7.1 附录清单

- 1.问题一第一种情况求解 MATLAB 程序。
- 2.问题一第二种情况求解 MATLAB 程序。
- 3.问题一的运算结果。
- 4.问题二第一个理想起始点求解 MATLAB 程序。

5.问题二第二个理想起始点求解 MATLAB 程序。

7.2 附录正文

1.问题一第一种情况求解 MATLAB 程序:

mycon1.m

```
function [g,ceq]=mycon1(x)
global m n;
g(1)=m+2750*cot(x(1))*(1-cos(x(3)))+3974.81*sin(x(3)+0.22929)-7800;
g(2)=-m-2750*cot(x(1))*(1-cos(x(3)))+1218.8028*sin(pi-x(3)-0.85479)+200;
g(3)=-2750*cot(x(2))+1839/2+200+sqrt((n+2750*cot(x(1))*sin(x(1))+2750*cot(x(2))*cos(x(2))-1250)^2+(m+2750*cot(x(1))*(1-cos(x(3)))-2750*cot(x(2))*sin(pi/2-x(3)))^2);
g(4)=-n-2750*cot(x(1))*sin(x(3))-2750*cot(x(2))*(cos(pi/2-x(3))-1)+1839/2-949.5;
g(5)=n+2750*cot(x(1))*sin(x(3))+2750*cot(x(2))*(cos(pi/2-x(3))-1)+1839/2-949.5;
g(6)=-m-2750*cot(x(1))*(1-cos(x(3)))+2750*cot(x(2))*sin(pi/2-x(3))-4167;
ceq=0;
```

test.m

```
function f= test(x)
global m;
f=0.2*x(1)+0.2*x(2)+2200*cot(x(1))*x(3)+2200*cot(x(2))*(pi/2-x(3))+0.8*(m+2750*cot(x(1))*(1-cos(x(3)))-2750*cot(x(2))*sin(pi/2-x(3)))+4167;
;
```

test1.m

```
global m n;
p=[];o=[];q=[];k=[];j=[];s=[];t=[];
x0=[0;0;0];lb=[0;0;0];ub=[0.62832;0.62832;1.5708];A=[];b=[];Aeq=[];beq=[];
for m=1119.5:500:6880.5
    for n=-8000:500:8000
[x,fval] = fmincon('test',x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'mycon1');
p=[p,n];
q=[q,m];
o=[o,fval];
k=[k,x(1)];
```

```

j=[j,x(2)];
s=[s,x(3)];
t=[t,pi/2-x(3)];
    end
end

```

2.问题一第二种情况求解 MATLAB 程序:

mycon2.m

```

function [g,ceq]=mycon2(x)
global c;
g(1)=-2750*cot(x)+1119.5;
g(2)=-c+2750*cot(x)-30;
g(3)=c-2750*cot(x)+30;
ceq=0;

```

test2.m

```

function f= test2(x)
global d;
f=0.4*pi*2750*cot(x)+0.8*(d-2750*cot(x)+4667-800)+0.2*x;

```

test3.m

```

global c d;
p=[];o=[];q=[];k=[];j=[];s=[];t=[];
x0=[0];lb=[0];ub=[0.62832];A=[];b=[];Aeq=[];beq=[];
for d=1119.5:500:6880.5
    for c=0:500:8000
[x,fval] = fmincon('test2',x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,'mycon2');
p=[p,c];
q=[q,d];
o=[o,fval];
k=[k,x];
    end
end

```

3.问题一的运算结果

y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	z
1119.5	-8000	1.21E-01	0.583448	4.70E-01	1.100518	15399.06
1119.5	-7500	1.28E-01	0.610924	4.68E-01	1.102853	14714.43
1119.5	-7000	1.43E-01	0.62832	4.90E-01	1.081258	14099.71
1119.5	-6500	1.73E-01	0.62832	5.53E-01	1.018221	13574.38
1119.5	-6000	2.07E-01	0.62832	6.17E-01	0.953573	13030.2
1119.5	-5500	2.48E-01	0.62832	6.84E-01	0.887238	12465.68
1119.5	-5000	2.95E-01	0.62832	7.52E-01	0.81912	11879.15

1119.5	-4500	3.52E-01	0.62832	8.22E-01	0.749103	11268.73
1119.5	-4000	4.20E-01	0.62832	8.94E-01	0.677041	10632.22
1119.5	-3500	5.01E-01	0.62832	9.68E-01	0.602759	9967.127
1119.5	-3000	5.99E-01	0.62832	1.04E+00	0.526039	9270.495
1119.5	-2500	6.28E-01	0.62832	0.972479	0.598317	8602.809
1119.5	-2000	6.28E-01	0.62832	8.64E-01	0.707121	8079.593
1119.5	-1500	0.62832	0.62832	0.767288	0.803508	7654.773
1119.5	-1000	0.62832	0.62832	0.756488	0.814308	7609.625
1119.5	-500	0.62832	0.62832	0.744617	0.82618	7560.591
1119.5	0	0.62832	0.62832	0.758476	0.81232	7617.896
y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	z
1619.5	-8000	1.10E-01	0.583683	4.31E-01	1.139346	15798.4
1619.5	-7500	1.16E-01	0.61098	0.426448	1.144349	15116.7
1619.5	-7000	1.43E-01	0.62832	4.90E-01	1.081258	14499.71
1619.5	-6500	1.73E-01	0.62832	5.53E-01	1.018222	13974.38
1619.5	-6000	2.07E-01	0.62832	6.17E-01	0.953573	13430.2
1619.5	-5500	2.48E-01	0.62832	6.84E-01	0.887238	12865.68
1619.5	-5000	2.95E-01	0.62832	7.52E-01	0.81912	12279.15
1619.5	-4500	3.52E-01	0.62832	8.22E-01	0.749103	11668.73
1619.5	-4000	4.20E-01	0.62832	8.94E-01	0.677041	11032.22
1619.5	-3500	5.01E-01	0.62832	9.68E-01	0.602759	10367.13
1619.5	-3000	5.99E-01	0.62832	1.04E+00	0.526039	9670.495
1619.5	-2500	6.28E-01	0.62832	9.72E-01	0.598317	9002.808
1619.5	-2000	6.28E-01	0.62832	8.64E-01	0.707121	8479.593
1619.5	-1500	0.62832	0.62832	0.767288	0.803508	8054.773
1619.5	-1000	0.62832	0.62832	0.774649	0.796147	8085.837
1619.5	-500	0.62832	0.62832	0.770425	0.800371	8067.983
1619.5	0	0.62832	0.62832	0.772353	0.798443	8076.124
y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	z
2119.5	-8000	9.95E-02	0.582811	0.392839	1.177957	16212.83
2119.5	-7500	1.04E-01	0.609758	3.85E-01	1.18556	15535.29
2119.5	-7000	1.43E-01	0.62832	4.88E-01	1.082721	14899.71
2119.5	-6500	1.73E-01	0.62832	5.53E-01	1.018221	14374.38
2119.5	-6000	2.07E-01	0.62832	0.617223	0.953573	13830.2
2119.5	-5500	2.48E-01	0.62832	6.84E-01	0.887238	13265.68
2119.5	-5000	2.90E-01	0.62832	7.39E-01	0.831328	12679.53
2119.5	-4500	3.35E-01	0.62832	7.84E-01	0.786831	12072.34
2119.5	-4000	3.92E-01	0.62832	8.37E-01	0.733296	11440.46
2119.5	-3500	4.68E-01	0.62832	9.05E-01	0.666271	10777.96
2119.5	-3000	5.72E-01	0.62832	9.94E-01	0.576733	10077.7
2119.5	-2500	6.28E-01	0.62832	9.72E-01	0.598317	9402.808
2119.5	-2000	6.28E-01	0.62832	8.64E-01	0.707121	8879.593
2119.5	-1500	0.62832	0.62832	0.767288	0.803508	8454.773

2119.5	-1000	0.62832	0.62832	0.674805	0.895991	8085.156
2119.5	-500	0.62832	0.62832	0.676414	0.894383	8091.248
2119.5	0	0.62832	0.62832	0.675597	0.895199	8088.153
y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	z
2619.5	-8000	8.90E-02	0.580891	3.55E-01	1.216229	16642.75
2619.5	-7500	9.18E-02	0.607331	3.44E-01	1.226335	15970.62
2619.5	-7000	1.16E-01	0.62832	4.04E-01	1.16713	15315.88
2619.5	-6500	1.73E-01	0.62832	5.53E-01	1.018223	14774.38
2619.5	-6000	1.94E-01	0.62832	5.82E-01	0.98887	14233.12
2619.5	-5500	2.18E-01	0.62832	6.08E-01	0.962319	13679
2619.5	-5000	2.47E-01	0.62832	6.38E-01	0.932344	13109.81
2619.5	-4500	2.83E-01	0.62832	6.73E-01	0.89802	12522.53
2619.5	-4000	3.28E-01	0.62832	7.13E-01	0.857983	11913.05
2619.5	-3500	3.88E-01	0.62832	0.760729	0.810067	11275.51
2619.5	-3000	4.67E-01	0.62832	8.20E-01	0.750512	10601.05
2619.5	-2500	5.79E-01	0.62832	8.99E-01	0.671749	9875.048
2619.5	-2000	0.62832	0.62832	0.863675	0.707121	9279.593
2619.5	-1500	0.62832	0.553732	0.802092	0.768704	9042.669
2619.5	-1000	0.62832	0.62832	0.651479	0.919317	8398.197
2619.5	-500	0.62832	0.62832	0.573364	0.997433	8126.319
2619.5	0	0.62832	0.62832	0.562296	1.008501	8090.271
y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	z
3119.5	-8000	7.86E-02	0.577988	3.17E-01	1.254037	17088.47
3119.5	-7500	8.01E-02	0.603777	0.304283	1.266514	16423.02
3119.5	-7000	8.92E-02	0.62832	3.17E-01	1.253921	15763.16
3119.5	-6500	0.145379	0.62832	0.471713	1.099083	15189.06
3119.5	-6000	1.65E-01	0.62832	5.01E-01	1.070101	14660.99
3119.5	-5500	1.84E-01	0.62832	5.22E-01	1.048881	14125.39
3119.5	-5000	2.07E-01	0.62832	5.46E-01	1.025257	13577.16
3119.5	-4500	2.35E-01	0.62832	5.72E-01	0.998683	13013.95
3119.5	-4000	2.71E-01	0.62832	6.02E-01	0.968403	12432.67
3119.5	-3500	3.16E-01	0.62832	6.37E-01	0.933312	11829.04
3119.5	-3000	3.76E-01	0.62832	6.79E-01	0.891703	11196.89
3119.5	-2500	4.57E-01	0.62832	0.730097	0.840699	10526.6
3119.5	-2000	0.557563	0.605671	0.787875	0.782921	9895.144
3119.5	-1500	0.62832	0.490327	0.830218	0.740578	9599.77
3119.5	-1000	0.62832	0.558597	0.687794	0.883003	8988.973
3119.5	-500	0.62832	0.62832	0.54427	1.026526	8432.908
3119.5	0	0.62832	0.62832	0.496545	1.074252	8289.207
3119.5	3500	0.62832				7317.715
3119.5	4000	0.598804				7429.567
3119.5	4500	0.545597				7657.875
3119.5	5000	0.500321				7886.184

3119.5	5500	0.461475				8114.495
3119.5	6000	0.427876				8342.807
3119.5	6500	0.398591				8571.12
3119.5	7000	0.37288				8799.433
3119.5	7500	0.350156				9027.747
3119.5	8000	0.329947				9256.062
y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	z
3619.5	-8000	6.86E-02	0.574166	2.80E-01	1.291254	17550.22
3619.5	-7500	6.88E-02	0.599173	2.65E-01	1.305938	16892.71
3619.5	-7000	6.85E-02	0.62585	2.48E-01	1.322768	16240.16
3619.5	-6500	1.15E-01	0.62832	3.81E-01	1.19002	15638.52
3619.5	-6000	1.37E-01	0.62832	4.24E-01	1.146774	15112.51
3619.5	-5500	1.52E-01	0.62832	4.41E-01	1.12996	14596.34
3619.5	-5000	1.71E-01	0.62832	4.59E-01	1.11145	14069.99
3619.5	-4500	1.93E-01	0.62832	4.80E-01	1.090919	13531.75
3619.5	-4000	2.20E-01	0.62832	5.03E-01	1.067934	12979.43
3619.5	-3500	2.54E-01	0.62832	5.29E-01	1.041905	12410.15
3619.5	-3000	2.98E-01	0.62832	5.59E-01	1.011994	11819.95
3619.5	-2500	3.56E-01	0.62832	0.593851	0.976945	11203.19
3619.5	-2000	3.95E-01	0.564546	0.615092	0.955704	10925.66
3619.5	-1500	0.488713	0.509465	0.669806	0.90099	10355.5
3619.5	-1000	0.62832	0.464816	0.765152	0.805644	9760.439
3619.5	-500	0.62832	0.567421	0.568453	1.002343	8977.885
3619.5	0	0.62832	0.62832	0.391987	1.178809	8417.183
3619.5	3500	0.62832				7717.715
3619.5	4000	0.598804				7829.567
3619.5	4500	0.545597				8057.875
3619.5	5000	0.500321				8286.184
3619.5	5500	0.461475				8514.495
3619.5	6000	0.427876				8742.807
3619.5	6500	0.398591				8971.12
3619.5	7000	0.37288				9199.433
3619.5	7500	0.350156				9427.747
3619.5	8000	0.329947				9656.062
y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	z
4119.5	-8000	5.89E-02	0.569486	2.43E-01	1.327745	18028.15
4119.5	-7500	5.80E-02	0.593595	2.26E-01	1.344437	17379.85
4119.5	-7000	5.64E-02	0.61917	2.07E-01	1.363435	16738
4119.5	-6500	8.48E-02	0.62832	2.88E-01	1.283127	16122.1
4119.5	-6000	1.11E-01	0.62832	3.51E-01	1.219482	15582.17
4119.5	-5500	1.23E-01	0.62832	3.64E-01	1.206359	15085.47
4119.5	-5000	1.37E-01	0.62832	3.79E-01	1.192045	14580.81
4119.5	-4500	1.54E-01	0.62832	3.94E-01	1.176341	14067

4119.5	-4000	1.75E-01	0.62832	4.12E-01	1.158997	13542.55
4119.5	-3500	2.00E-01	0.62832	0.431111	1.139686	13005.55
4119.5	-3000	2.32E-01	0.62832	4.53E-01	1.11797	12453.54
4119.5	-2500	2.71E-01	0.622556	4.76E-01	1.094571	11919.88
4119.5	-2000	0.263154	0.511623	0.471977	1.098819	12191.99
4119.5	-1500	0.319809	0.489467	0.505952	1.064844	11607.88
4119.5	-1000	0.62832	0.53268	0.673659	0.897138	9762.156
4119.5	-500	0.62832	0.49294	0.622845	0.947952	9639.898
4119.5	0	0.62832	0.554486	0.479883	1.090913	9148.771
4119.5	3500	0.62832				8117.715
4119.5	4000	0.598804				8229.567
4119.5	4500	0.545597				8457.875
4119.5	5000	0.500321				8686.184
4119.5	5500	0.461475				8914.495
4119.5	6000	0.427876				9142.807
4119.5	6500	0.398591				9371.12
4119.5	7000	0.37288				9599.433
4119.5	7500	0.350156				9827.747
4119.5	8000	0.329947				10056.06
y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	z
4619.5	-8000	4.95E-02	0.56401	2.07E-01	1.363368	18522.36
4619.5	-7500	4.77E-02	0.587113	1.89E-01	1.381825	17884.49
4619.5	-7000	4.49E-02	0.611454	1.68E-01	1.402645	17254.73
4619.5	-6500	5.52E-02	0.62832	1.93E-01	1.378055	16638.6
4619.5	-6000	8.77E-02	0.62832	2.82E-01	1.288732	16065.99
4619.5	-5500	9.67E-02	0.62832	2.92E-01	1.278747	15588.33
4619.5	-5000	1.07E-01	0.62832	3.03E-01	1.267937	15104.66
4619.5	-4500	1.20E-01	0.62832	3.15E-01	1.256182	14614.18
4619.5	-4000	1.34E-01	0.62832	3.27E-01	1.243333	14115.89
4619.5	-3500	1.53E-01	0.62832	3.42E-01	1.229208	13608.57
4619.5	-3000	1.75E-01	0.62832	0.357227	1.213569	13090.69
4619.5	-2500	0.194424	0.599855	0.369206	1.20159	12772.43
4619.5	-2000	1.84E-05	0.613282	3.93E-05	1.570757	13515.29
4619.5	-1500	0.213124	0.470136	0.380627	1.190169	12759.5
4619.5	-1000	0.308272	0.487031	0.43676	1.134036	11642.32
4619.5	-500	0.62832	0.528558	0.551202	1.019594	9778.715
4619.5	0	0.62832	0.500224	0.496237	1.074559	9682.869
4619.5	3500	0.62832				8517.715
4619.5	4000	0.598804				8629.567
4619.5	4500	0.545597				8857.875
4619.5	5000	0.500321				9086.184
4619.5	5500	0.461475				9314.495
4619.5	6000	0.427876				9542.807

4619.5	6500	0.398591				9771.12
4619.5	7000	0.37288				9999.433
4619.5	7500	0.350156				10227.75
4619.5	8000	0.329947				10456.06
y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	z
5119.5	-8000	4.07E-02	0.557792	1.73E-01	1.397963	19032.87
5119.5	-7500	3.80E-02	0.579786	1.53E-01	1.417884	18406.6
5119.5	-7000	3.43E-02	0.602764	1.31E-01	1.440094	17790.26
5119.5	-6500	2.95E-02	0.626582	1.06E-01	1.464894	17186.26
5119.5	-6000	5.59E-02	0.62832	1.85E-01	1.385321	16609.24
5119.5	-5500	7.22E-02	0.62832	2.23E-01	1.347676	16101.76
5119.5	-5000	7.96E-02	0.62832	2.31E-01	1.339843	15638.16
5119.5	-4500	8.84E-02	0.62832	0.239412	1.331385	15169.72
5119.5	-4000	0.098827	0.62832	0.24858	1.322216	14695.8
5119.5	-3500	1.11E-01	0.62832	2.59E-01	1.312233	14215.63
5119.5	-3000	0.125355	0.62152	0.268573	1.302223	13782.49
5119.5	-2500	0.133118	0.577304	0.273705	1.297091	13666.79
5119.5	-2000	0.000345	0.526636	0.000841	1.569956	14945.04
5119.5	-1500	7.62E-06	0.520654	1.72E-05	1.570779	14576.12
5119.5	-1000	0.174906	0.460675	0.298737	1.272059	13102.26
5119.5	-500	0.62832	0.547466	0.470168	1.100628	9936.41
5119.5	0	0.62832	0.476448	0.451775	1.119021	10036.22
5119.5	3500	0.62832				8917.715
5119.5	4000	0.598804				9029.567
5119.5	4500	0.545597				9257.875
5119.5	5000	0.500321				9486.184
5119.5	5500	0.461475				9714.495
5119.5	6000	0.427876				9942.807
5119.5	6500	0.398591				10171.12
5119.5	7000	0.37288				10399.43
5119.5	7500	0.350156				10627.75
5119.5	8000	0.329947				10856.06
y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	z
5619.5	-8000	3.04E-02	0.552145	0.131198	1.439598	19559.76
5619.5	-7500	2.89E-02	0.571661	1.18E-01	1.452349	18946.09
5619.5	-7000	2.46E-02	0.593134	9.54E-02	1.475374	18344.41
5619.5	-6500	1.92E-02	0.615026	7.04E-02	1.500372	17757.46
5619.5	-6000	2.44E-02	0.62832	8.39E-02	1.486889	17190.37
5619.5	-5500	4.47E-02	0.62832	1.42E-01	1.428496	16652.71
5619.5	-5000	5.46E-02	0.62832	0.162459	1.408337	16178.99
5619.5	-4500	6.03E-02	0.62832	1.68E-01	1.402686	15731.29
5619.5	-4000	6.70E-02	0.62832	1.74E-01	1.3966	15280.03
5619.5	-3500	7.47E-02	0.624816	0.180459	1.390337	14854.91

5619.5	-3000	0.081029	0.601587	0.185266	1.38553	14602.46
5619.5	-2500	0.08419	0.555426	0.187526	1.383271	14595.9
5619.5	-2000	2.43E-07	0.477758	6.48E-07	1.570796	16119.59
5619.5	-1500	4.33E-06	0.480451	1.00E-05	1.570786	15334.36
5619.5	-1000	1.13E-05	0.483502	2.40E-05	1.570772	14878.89
5619.5	-500	0.62832	0.385371	0.736341	0.834455	11350.75
5619.5	0	0.62832	0.458929	0.485344	1.085452	10543.4
5619.5	3500	0.62832				9317.715
5619.5	4000	0.598804				9429.567
5619.5	4500	0.545597				9657.875
5619.5	5000	0.500321				9886.184
5619.5	5500	0.461475				10114.5
5619.5	6000	0.427876				10342.81
5619.5	6500	0.398591				10571.12
5619.5	7000	0.37288				10799.43
5619.5	7500	0.350156				11027.75
5619.5	8000	0.329947				11256.06
y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	z
6119.5	-8000	1.78E-02	0.547949	0.078527	1.49227	20104.01
6119.5	-7500	1.95E-02	0.563586	8.12E-02	1.489574	19502.83
6119.5	-7000	1.59E-02	0.58255	6.29E-02	1.507883	18916.94
6119.5	-6500	1.04E-02	0.602199	3.92E-02	1.531599	18348.25
6119.5	-6000	1.96E-06	0.624387	6.99E-06	1.570789	17801.29
6119.5	-5500	1.05E-02	0.62832	0.034699	1.536097	17281.57
6119.5	-5000	2.94E-02	0.622343	0.090659	1.480138	16795.16
6119.5	-4500	3.46E-02	0.622973	9.99E-02	1.470924	16346.77
6119.5	-4000	3.81E-02	0.619079	1.03E-01	1.467692	15952.98
6119.5	-3500	4.14E-02	0.60678	0.10587	1.464927	15638.95
6119.5	-3000	0.044394	0.581762	0.108425	1.462371	15456.01
6119.5	-2500	0.045264	0.53438	0.109102	1.461695	15555.6
6119.5	-2000	1.04E-06	0.442671	2.95E-06	1.570793	17103.29
6119.5	-1500	4.88E-08	0.444907	1.34E-07	1.570796	16885.79
6119.5	-1000	4.45E-05	0.447125	0.000103	1.570693	15940.36
6119.5	-500	0.063242	0.426341	0.125257	1.445539	15048.98
6119.5	0	0.62832	0.326028	0.745256	0.825541	11878.45
6119.5	3500	0.62832				9717.715
6119.5	4000	0.598804				9829.567
6119.5	4500	0.545597				10057.88
6119.5	5000	0.500321				10286.18
6119.5	5500	0.461475				10514.5
6119.5	6000	0.427876				10742.81
6119.5	6500	0.398591				10971.12
6119.5	7000	0.37288				11199.43

6119.5	7500	0.350156				11427.75
6119.5	8000	0.329947				11656.06
y	x	ψ_1	ψ_2	α_1	α_2	z
6619.5	-8000	6.11E-03	0.543361	0.027551	1.543245	20665.27
6619.5	-7500	6.66E-03	0.558027	2.85E-02	1.542328	20077.42
6619.5	-7000	7.28E-03	0.571836	2.94E-02	1.54137	19507.51
6619.5	-6500	3.76E-03	0.587742	1.44E-02	1.556399	18958.12
6619.5	-6000	2.37E-04	0.601977	8.60E-04	1.569936	18433.13
6619.5	-5500	1.61E-05	0.611079	5.49E-05	1.570741	17938.26
6619.5	-5000	1.05E-02	0.608136	3.36E-02	1.537207	17478.33
6619.5	-4500	1.15E-02	0.608471	3.47E-02	1.53614	17065.04
6619.5	-4000	1.25E-02	0.602742	0.035678	1.535118	16713.91
6619.5	-3500	1.35E-02	0.588661	3.66E-02	1.534209	16452.86
6619.5	-3000	0.014278	0.562309	0.037246	1.53355	16339.72
6619.5	-2500	0.014322	0.514217	0.037283	1.533513	16543.09
6619.5	-2000	8.61E-06	0.411713	2.57E-05	1.570771	18074.62
6619.5	-1500	1.70E-06	0.413061	4.59E-06	1.570792	17433.66
6619.5	-1000	2.38E-05	0.415379	5.90E-05	1.570737	16930.87
6619.5	-500	0.62832	0.384007	0.628391	0.942405	11837.11
6619.5	0	0.034814	0.407055	0.069149	1.501647	15720.27
6619.5	3500	0.62832				10117.71
6619.5	4000	0.598804				10229.57
6619.5	4500	0.545597				10457.88
6619.5	5000	0.500321				10686.18
6619.5	5500	0.461475				10914.5
6619.5	6000	0.427876				11142.81
6619.5	6500	0.398591				11371.12
6619.5	7000	0.37288				11599.43
6619.5	7500	0.350156				11827.75
6619.5	8000	0.329947				12056.06

4.问题二第一个理想起始点求解 MATLAB 程序。

```

x0=-500;
y0=1119.5;
a=0.62832;
b=0.62832;
m=0.744617;
n=0.82618;
lv=4667;
hv=800;
c=300;
save data1;

```

```

load('data1.mat');
R1=2750*cot(a);
R2=2750*cot(b);
x1=x0;
y1=y0;
x2=x1+R1*sin(m);
y2=y1+R1*(1-cos(m));
l1=m*R1;
x3=x2+R2*(cos(n)-1);
y3=y2-R2*sin(n);
l2=n*R2;
x4=x3;
y4=-lv+hv-c;
l3=y4-y3;

```

5.问题二第二个理想起始点求解 MATLAB 程序。

```

x0=3500;
y0=3119.5;
c=0.62832;
d=pi/2;
lv=4667;
hv=800;
save data2;

```

```

load('data2');
x1=x0;
y1=y0;
R3=2750*cot(c);
x3=x1-R3;
y3=y1-R3;
l4=d*R3;
x4=x3;
y4=-lv+hv-c;
s=y4-y3;

```