

## 2017-2018 学年高等数学(上册)半期复习题

1. 下列函数中 (其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数), 非周期函数是 ( ) .

- A、  $y = \sin x + \cos \pi x$ ;      B、  $y = \sin \sqrt[2]{2x}$ ;      C、  $y = a + \cos bx$ ;      D、  $y = x - [x]$

2. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x}{a})^{\frac{b}{x}}$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ) 的值为 ( )

- A、 1      B、  $\ln \frac{b}{a}$       C、  $e^{\frac{b}{a}}$       D、  $\frac{be}{a}$

3. 设  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 1 + k + x^2, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则常数  $k =$  ( )

- A、 0      B、 1      C、 -1      D、 不存在

4. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) - f(0)] \sin 3x}{x^2} = 4$ , 则  $f'(0) =$  ( )

- A、 3      B、 4      C、  $\frac{3}{4}$       D、  $\frac{4}{3}$

5. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 记 (I)  $f(a) = f(b)$ , (II) 在  $(a, b)$  内  $f(x)$  的导数恒为零 (即  $f'(x) \equiv 0$ ), 则 ( )

- A、 (I) 是 (II) 的充分但非必要条件      B、 (I) 是 (II) 的必要, 但非充分条件  
C、 (I) 是 (II) 的充要条件      D、 (I) 与 (II) 既非充分也非必要条件

### 二、填空题

6. 设  $y = x \cos x$ , 则  $y'' =$  \_\_\_\_\_.

7. 曲线  $y = e^x$  在点  $(0, 1)$  处的切线方程为 \_\_\_\_\_.

8. 设  $y = (2x^3 - 4)^3$ , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_.

9. 设  $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x < 0 \\ 2x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ , 则  $f'(0) =$  \_\_\_\_\_.

10. 函数  $y = x^3(1-x)$  的单调增加区间为 \_\_\_\_\_.

### 三、计算题

11. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{4n^3}$ .

12. 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\sin x) - 1}{3x^2}$ .

13. 设  $\varphi(x)$  与  $\psi(x)$  为可导函数,  $y = \arctan \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ,  $\psi(x) \neq 0$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

14. 求  $y = 2x^{\sin x}$  ( $x > 0$ ) 的导数  $y'$ .

15. 求函数  $f(x) = \frac{1}{e - e^{\frac{1}{x}}}$  的间断点, 并指出其类型.

16. 设  $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = 1 - t \end{cases}$ , (1) 求  $\frac{dy}{dx}$ ; (2) 求  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

17. 求由方程  $e^y + xy = e$  确定的隐函数  $y = y(x)$  在  $x = 0$  处的导数  $y'(0)$ .

18. 求函数  $y = xe^{-x}$  图形的拐点及凹或凸的区间.

#### 四、应用题

19. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 1000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去. 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 试问房租定为多少时可获得最大收入?

#### 五、证明题

20. 设  $f''(x) < 0$ ,  $f(0) = 0$ , 证明: 对于任何  $0 < x_1 < x_2$  的  $x_1$  和  $x_2$ , 有

$$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2).$$

#### 一. 求极限

1. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{3 + n} - \frac{n}{2} \right)$

2. 求  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(3-x)}{\sqrt{1+x}-2}$

3. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - 1 - x}{x \ln(1+x)}$ .

4. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

#### 二. 求函数的导数与微分

5. 设函数  $y = x \ln x + \arctan e^{2x}$ , 求  $dy$ .

6. 设  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$  确定函数  $y = y(x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ 、 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

7. 设方程  $e = xy + e^y$  确定了隐函数  $y = y(x)$ , 求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 。

8. 设  $y = x^{\sin x}$  ( $x > 0$ ), 求  $\frac{dy}{dx}$

### 三. 解答题

9. 设数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$ , 若  $x_n \leq a \leq y_n$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ ,

讨论  $\{x_n\}, \{y_n\}$  的收敛性, 若收敛, 求出其极限。

10. 讨论函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$  的连续性, 若有间断点, 判别其类型。

11. 确定  $a$  的值, 使  $f(x) = a \sin x + \frac{\sin 3x}{3}$  在  $x = \frac{\pi}{3}$  处取极值, 指出它是极大值还是极小值? 并求此极值。

12. 求函数  $y = \ln(1+x^2)$  的图形的凹、凸区间及拐点。

13. 写出罗尔定理, 并举例分析说明如果罗尔定理的某个条件不满足时, 结论是否成立? (注意, 只要求对罗尔定理的某一个条件举例就可以了)。

### 四. 证明题

14. 方程  $x^3 + x - 1 = 0$  在  $(0, 1)$  内有且仅有一个实根。

15. 证明: 当  $x > 0$  时,  $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$ 。

### 五. 应用题

16. 设函数  $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$ , 为了使函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续且可导,

$a, b$  应取什么值?

17. 要做一个容积为  $3000 m^3$  的无盖圆柱形蓄水池, 已知池底单位面积造价为池

壁单位面积造价的 3 倍，问蓄水池底半径  $r$  和高  $h$  等于多少时才能使总造价最低？

18. 描绘函数  $y = e^{-x^2}$  的图形（要求按作图要求，写出详细的作图步骤，画出图形草图）。

图形略。

### 一、计算极限题

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} =$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} =$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} =$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x} =$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) =$

6. 解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\cos x - 1} =$

### 二、计算导数或微分

7. 设  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  知，求  $y'$ 。

8. 设  $y = e^{2x} \cos 3x$ ，求  $y''$ 。

9. 设  $y = x^x$ ，( $x > 0$ )，求  $dy$ 。

10. 求由方程  $e^{xy} + y = \cos(xy)$  所确定的函数  $y = y(x)$  的导数  $\frac{dy}{dx}$ 。

11. 求曲线  $\begin{cases} x = \theta(1 - \sin \theta) \\ y = \theta \cos \theta \end{cases}$  在  $\theta = 0$  处的切线方程。

12. 设  $\begin{cases} x = t + \arctan t \\ y = t^3 + 6t \end{cases}$ ，求  $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=1}$ 。

14. 设  $y = x^2 e^{3x}$ ，求  $y^{(10)}(x)$ 。

14. 设函数  $f(x)$  在点  $x = 0$  处有定义， $f(0) = 1$ ，且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + \sin x \cdot f(x)}{e^{x^2} - 1} = 0$ ，求

$f'(0)$ 。

### 三、证明题

15. 已知  $a > 0$ ，设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可导，证明：存在  $\xi \in (a, b)$ ，使得

$$\frac{af(b) - bf(a)}{b - a} = \xi f'(\xi) - f(\xi)。$$

### 四、应用题

17. 求函数  $y = x - \ln(1 + x)$  的单调区间与极值。

18. 试确定曲线  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  中的  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ ，使得  $x = -2$  处曲线有水平切线， $(1, -10)$  为拐点，且点  $(-2, 44)$  在曲线上。

19. 要造一个圆柱形无盖的蓄水池，容积为  $300m^3$ ，底面的造价是侧面造价的 2 倍，设侧面每平方米造价为  $a$  元  $/m^2$ 。

(1) 试将整个蓄水池的造价  $y$  表示为底面半径  $r$  的函数；

(2) 问底面半径  $r$  为多大时，整个蓄水池的造价最少？