2017 高等数学上册半期复习题参考解答

一、选择题

1. A　2. C　3. C　4. D　5. B

二、填空题

6. $-2\sin x - x\cos x$　7. $y = x + 1$　8. $18x^2(2x^3-4)^3dx$　9. 0　10. $(-\infty, \frac{3}{4}]$

三、计算题

11. 解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{4n^3} = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})(1+\dfrac{2}{n})(2+\dfrac{3}{n}) = \dfrac{1}{2}$

12. 解 法 1 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos(\sin x)-1}{3x^2} = -\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2} = -\frac{1}{6}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = -\frac{1}{6}\quad .$$

法 2 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos(\sin x)-1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\sin(\sin x)\ \cos x}{6x}$.

$$= -\frac{1}{6}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}$$

其他方法略.

13. 解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+(\frac{\varphi}{\psi})^2}(\dfrac{\varphi}{\psi})' = \dfrac{\psi^2}{\varphi^2+\psi^2}\cdot\dfrac{\varphi'\psi - \varphi\psi'}{\psi^2} = \dfrac{\varphi'\psi - \varphi\psi'}{\varphi^2+\psi^2}$

14. 解 因为 $\ln y = \ln 2 + \sin x\ln x$， $\dfrac{1}{y}y' = \cos x\ln x + \dfrac{\sin x}{x}$

所以 $y' = y(\cos x\ln x + \dfrac{\sin x}{x}) = 2x^{\sin x}(\cos x\ln x + \dfrac{\sin x}{x})$.

或写为指数函数求解(略)

15. 解 间断点 $x = 0,1$ …

因 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e-e^{\frac{1}{x}}} = 0$， $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{e-e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{e}$　故 $x = 0$ 为第一类间断点（跳跃间断点）

因 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 1}(e-e^{\frac{1}{x}}) = 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{e-e^{\frac{1}{x}}} = \infty$

故 $x = 1$ 为第二类间断点（无穷间断点）

16. 解 (1) $\dfrac{dy}{dx} = (1-t)'/(\dfrac{t^2}{2})' = -\dfrac{1}{t}$; …

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=(-\dfrac{1}{t})'/(\dfrac{t^2}{2})'=\dfrac{1}{t^3}\cdots$.

17. 解 $x=0$ 时，$y=1\ldots\ldots$

方程两边对 x 求导得 $e^y y'+y+xy'=0\ldots$ 于是 $y'=\dfrac{-y}{e^y+x}$

所以 $y'(0)=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}$ …

18. 解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$y'=e^{-x}-xe^{-x}$，$y''=e^{-x}(x-2)$

令 $y''=0$ 得 $x=2$ …

当 $-\infty<x<2$ 时，$y''<0$，凸区间为 $(-\infty,2]$ ……

当 $2<x<+\infty$ 时，$y''>0$，凹区间为 $[2,+\infty)$ ……

拐点为 $(2,\dfrac{2}{e^2})$ … .

四、应用题（

19. 解 设每套房月租金为 x 元，则租不出去的房子套数为 $\dfrac{x-1000}{50}=\dfrac{x}{50}-20$

每月租出的房屋总租金为 $y=[50-(\dfrac{x}{50}-20)](x-100)$.

令 $y'=-\dfrac{x}{25}+72=0$ 得唯一驻点 $x=1800$

由实际问题知该驻点就是最大值点，

即每套公寓月房租为 1800 元时可获得最大收入. …

五、证明题

20. 证 $f(x)$ 在 $[0,x_1]$ 上连续，在 $(0,x_1)$ 内可导，由拉格朗日中值定理知 $\exists\xi_1\in(0,x_1)$，

使得 $f(x_1)-f(0)=f'(\xi_1)x_1$ (1) ……

$f(x)$ 在 $[x_2,x_1+x_2]$ 上连续，在（x_2,x_1+x_2）内可导，由拉格朗日中值定理知

$\exists\xi_2\in(x_2,x_1+x_2)$，

使得 $f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\xi_2)x_1$ (2) …

因为 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，所以 $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$ …

再由 $f(0)=0$ 和式（1）、（2）得 $f(x_1)>f(x_1+x_2)-f(x_2)$，

即 $f(x_1+x_2) < f(x_1)+f(x_2)$

一. 求极限

1．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{3+n}-\frac{n}{2}\right)$

解　原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{3+n}-\frac{n}{2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{3+n}=-1$

2．求 $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sin(3-x)}{\sqrt{1+x}-2}$

解　原式=$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sin(3-x)(\sqrt{1+x}+2)}{(\sqrt{1+x}-2)(\sqrt{1+x}+2)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{\sin(3-x)}{(x-3)}(\sqrt{1+x}+2)=-4$

3．求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\cos x-1-x}{x\ln(1+x)}$。

解　原式=$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\cos x-1-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x(\cos x-\sin x)-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}(-e^x\sin x)=0$

4．求 $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解　原式=$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3\cdot2x}{x}}=e^6$

二．求函数的导数与微分

5．设函数 $y=x\ln x+\arctan e^{2x}$，求 dy 。

解　$dy=d(x\ln x)+d(\arctan e^{2x})=(\ln x+1)dx+\frac{1}{1+e^{4x}}d(e^{2x})$

$=(\ln x+1)dx+\frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}dx=(\ln x+1+\frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}})dx$

6．设 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$ 确定函数 $y=y(x)$，求 $\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$。

解　$\frac{dx}{dt}=\frac{t}{1+t^2}$，$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$，$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}$$

7. 设方程$e=xy+e^y$ 确定了隐函数$y=y(x)$，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ 。

解，将$x=0$代入方程$e=xy+e^y$，得$e=e^y$， $y=1$

将方程$e=xy+e^y$两边对x求导，得

$$y+x\frac{dy}{dx}+e^y\frac{dy}{dx}=0\text{，}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x+e^y}\text{，}\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{1}{e}$$

8. 设$y=x^{\sin x}$ （$x>0$），求$\frac{dy}{dx}$

解 $y=x^{\sin x}=e^{\sin x\ln x}$， $\frac{dy}{dx}=e^{\sin x\ln x}(\sin x\ln x)'=x^{\sin x}(\cos x+\frac{\sin x}{x})$

三．解答题

9. 设数列$\{x_n\},\{y_n\}$，**若**$x_n\le a\le y_n$，（$n=1,2,\cdots\cdots$），且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，

讨论$\{x_n\},\{y_n\}$的收敛性，若收敛，求出其极限。

解 $0\le y_n-a\le y_n-x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，**由夹逼准则，**$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-a)=0$， $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$

$0\le a-x_n\le y_n-x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，**由夹逼准则，**$\lim\limits_{n\to\infty}(a-x_n)=0$， $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

$\{x_n\},\{y_n\}$收敛，其极限都为a

10. 讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$的连续性，若有间断点，判别其类型。

解 当$|x|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$；当$|x|>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$， $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$

$f(1-)=1$， $f(1+)=-1$， $f(1+)\ne f(1-)$， $x=1$为$f(x)$的第一类跳跃间断点，

$f(-1-)=-1$， $f(-1+)=1$， $f(1+)\ne f(1-)$， $x=-1$为$f(x)$的第一类跳跃间断点，

$f(x)$在$(-\infty,-1)$、$(-1,1)$、$(1,+\infty)$内连续

11. 确定a的值，使$f(x)=a\sin x+\frac{\sin 3x}{3}$在$x=\frac{\pi}{3}$处取极值，指出它是极大值还是

极小值？并求此极值。

解 欲使 $f(x)=a\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取极值，必有 $f'(\dfrac{\pi}{3})=0$，

$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，由 $f'(\dfrac{\pi}{3})=0$ 得 $a\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\pi=0$，$a=2$

$f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$　$f''(\dfrac{\pi}{3})=-\sqrt{3}<0$，使 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取极大值

极大值为 $f(\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3}$

12. 求函数 $y=\ln(1+x^2)$ 的图形的凹、凸区间及拐点。

解 函数 $y=\ln(1+x^2)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且可导

$y'=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$　令 $y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=0$，得 $x=\pm1$

当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$y''<0$，函数 $y=\ln(1+x^2)$ 的图形在 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 内是凸的，当 $-1<x<1$ 时，$y''>0$，函数 $y=\ln(1+x^2)$ 的图形在 $[-1,1]$ 内是凹的。

$(\pm1,\ln 2)$ 为函数图形的拐点。

13. 写出罗尔定理，并举例分析说明如果罗尔定理的某个条件条件不满足时，结论是否成立？（注意，只要求对罗尔定理的某一个条件举例就可以了）。

解 罗尔定理：如果函数 $y=f(x)$ 满足 （1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，（2）在开区间 (a,b) 内可导，（3）$f(a)=f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。

例如 $y=|x|$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，$f(-1)=f(1)=1$，但在开区间 $(-1,1)$ 的 $x=0$ 处不可导，当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)=-1$ 时，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=1$，而 $f'(0)$ 不存在，在 $(-1,1)$ 的任意一点其导数都不为 0，结论不成立。

四、证明题

14. 方程 $x^3+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根。

证 设 $f(x)=x^3+x-1$，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=-1\neq f(1)=1$，

由零点定理知在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)$ =0，

$x^3+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

假设 $(0,1)$ 内存在另一个异于 ξ 的点 ξ_1，使得 $f(\xi_1)=0$，不妨设 $\xi<\xi_1$

函数 $f(x)$ 在$[\xi,\xi_1]$上连续，在(ξ,ξ_1)内可导，且 $f(\xi)=f(\xi_1)=0$，由罗尔定理，在(ξ,ξ_1)至少存在一点η，使得 $f'(\eta)=0$，而 $f'(x)=3x^2+1>1$ 故矛盾，假设不成立，$x^3+x-1=0$ 在$(0,1)$内有且仅有一个实根。

15. 证明：当$x>0$时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$。

证 设 $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$，函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续，

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}},$$

当$x>0$时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调增加，

当$x>0$时，$f(x)>f(0)=0$，即$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$

五．**应用题**

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ ax+b & x\ge 0 \end{cases}$，为了使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导，a、b 应取什么值？

解 使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必使 $f(0+)=f(0-)=f(0)=b$，

$f(0-)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}e^x=1$，得$b=1$

使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，必使 $f_+'(0)=f_-'(0)$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{ax+b-b}{x}=a$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{e^x-b}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$f_+'(0)=f_-'(0)$，$a=1$

当$a=1$，$b=1$函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导。

17. 要做一个容积为 $3000m^3$的无盖圆柱形蓄水池，已知池底单位面积造价为池壁单位面积造价的 3 倍，问蓄水池底半径r和高h等于多少时才能使总造价最低？

解 设池壁单位面积造价为a， 则池底单位面积造价为$3a$

由$\pi r^2 h = 3000$，得$h = \dfrac{3000}{\pi r^2}$

总造价为$P = 3a\pi r^2 + 2a\pi rh = 3a\pi r^2 + \dfrac{6000a}{r}$

$\dfrac{dP}{dr} = 6a\pi r - \dfrac{6000a}{r^2} = 0$，$r = \dfrac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$

$$\left.\frac{d^2P}{dr^2}\right|_{r=\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}} = 6a\pi + \left.\frac{12000a}{r^3}\right|_{r=\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}} = 18\pi a > 0$$

当$r = \dfrac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$、$r = \dfrac{30}{\sqrt[3]{\pi}}$时，总造价最低。

18. 描绘函数$y = e^{\frac{-x^2}{2}}$的图形（要求按作图要求，写出详细的作图步骤，画出图形草图）。

解　$y = e^{\frac{-x^2}{2}}$的定义域为$(-\infty, +\infty)$内连续，为偶函数

$y' = -xe^{\frac{-x^2}{2}}$，$y'' = (x^2 - 1)e^{\frac{-x^2}{2}}$

令$y' = 0, y'' = 0$，得$x = 1, x = \pm 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} = 0$，$y = 0$是函数$y = e^{\frac{-x^2}{2}}$的图形的一条水平渐近线。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y	单增上凹		单增上凸		单 减 上凸		单 减 上凹

(

极大值$y(0) = 1$，曲线拐点为$(\pm 1, e^{-\frac{1}{2}})$

图形略。

一、计算极限题

1．解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^{2}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}$

2．解：$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

3．解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$

4．解：$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x+1})^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x+1})^{2(x+1)-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left((1+\frac{1}{x+1})^{(x+1)}\right)^{2}}{(1+\frac{1}{x+1})^{2}}=e^{2}$

5. 解：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x+1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+1)-(1-e^{-x})}{x(1-e^{-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{2}+x-1+e^{-x}}{x^{2}}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+1-e^{-x}}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}$

6. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^{x}-1)}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{2}}{\cos x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{-\cos x}=-2$

二、计算导数或微分

7．设 $y=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$ 知，求 y'。

解：$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^{2}+1}}(x+\sqrt{x^{2}+1})'=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^{2}+1}}}{x+\sqrt{x^{2}+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^{2}+1}}$

8．设 $y=e^{2x}\cos 3x$，求 y''。

解：$y'=2e^{2x}\cos 3x+3e^{2x}(-\sin 3x)=e^{2x}(2\cos 3x-3\sin 3x)$

$y''=2e^{2x}(2\cos 3x-3\sin 3x)+e^{2x}(-6\sin 3x-9\cos 3x)\quad=-e^{2x}(5\cos 3x+12\sin 3x)$

9．设 $y=x^{x}$，（$x>0$），求 dy。

解：$y=x^{x}=e^{x\ln x}$，$dy=d(e^{x\ln x})=e^{x\ln x}d(x\ln x)=e^{x\ln x}(1+\ln x)dx=x^{x}(1+\ln x)dx$

10．求由方程 $e^{xy}+y=\cos(xy)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$。

解：将方程 $e^{xy}+y=\cos(xy)$ 两边对 x 求导，得

$$e^{xy}(y+x\frac{dy}{dx})+\frac{dy}{dx}=-\sin(xy)(y+x\frac{dy}{dx})$$

$$(xe^{xy}+x\sin(xy)+1)\frac{dy}{dx}=-ye^{xy}-y\sin(xy)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ye^{xy}+y\sin(xy)}{e^{xy}y+(xe^{xy}+x\sin(xy)+1}$$

11. 求曲线$\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta)\\ y=\theta\cos\theta\end{cases}$在$\theta=0$处的切线方程。

解：当$\theta=0$时，$x=0,y=0$

$$\frac{dy}{dt}=\cos\theta-\theta\sin\theta，\quad \frac{dx}{dt}=1-\sin\theta-\theta\cos\theta，\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$$

曲线$\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta)\\ y=\theta\cos\theta\end{cases}$在$\theta=0$的切线斜率为：$k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=0}=1$

所求切线方程为$y=x$

12. 设$\begin{cases}x=t+\arctan t\\ y=t^3+6t\end{cases}$，求$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$。

解：$\frac{dy}{dt}=3t^2+6$，$\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{1+t^2}=\frac{2+t^2}{1+t^2}$，$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+6}{\frac{t^2+2}{t^2+1}}=3(t^2+1)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t}{\frac{t^2+2}{t^2+1}}=6t\frac{t^2+1}{t^2+2}=6t-\frac{6t}{t^2+2}，\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=4$$

13. 设$y=x^2\mathrm{e}^{3x}$，求$y^{(10)}(x)$。

解：$y^{(10)}=(x^2e^{3x})^{(10)}=x^2(e^{3x})^{(10)}+C_{10}^1(x^2)'\cdot(e^{3x})^{(9)}+C_{10}^2(x^2)''\cdot(e^{3x})^{(8)}$

$$=3^{10}x^2e^{3x}+3^9 20xe^{3x}+3^8\cdot 45e^{3x}=3^9(3x^2+20x+15)e^{3x}$$

14. 设函数$f(x)$在点$x=0$处有定义，$f(0)=1$，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=0$，求$f'(0)$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)}{x^2}=0$

$\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)=o(x^2)$， $f(x)=\dfrac{-\ln(1-x)+o(x^2)}{\sin x}$，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-\ln(1-x)+o(x^2)}{\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1-x)+o(x^2)-\sin x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1-x)+o(x^2)-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1-x)-\sin x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1-x}-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x)\cos x}{2x-2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+(1-x)\sin x}{2-4x}=\frac{1}{2}$$

三、证明题

15. 已知 $a>0$，设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)-f(\xi)$。

解：令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}\dfrac{1}{x}$，由于函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导

函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 在区间 (a,b) 内可导

$F(a)=F(b)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，用罗尔定理得，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$ 。

$F'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}-\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}\dfrac{1}{x^2}$，

$F'(\xi)=\dfrac{f'(\xi)\xi-f(\xi)}{\xi^2}-\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}\dfrac{1}{\xi^2}=0$，即 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)-f(\xi)$

法 2：令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$G(x)=\dfrac{1}{x}$，用柯西中值定理证。

16. 设 $0<t<1,\beta>\alpha>0$，证明：$\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+t^\alpha)>\dfrac{1}{\beta}\ln(1+t^\beta)$。

解：设 $f(t)=\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+t^\alpha)-\dfrac{1}{\beta}\ln(1+t^\beta)$，$f(t)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在区间 $(0,1)$ 内可导，

$f'(t)=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\alpha t^{\alpha-1}}{1+t^\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\beta t^{\beta-1}}{1+t^\beta}=\dfrac{t^{\alpha-1}-t^{\beta-1}}{(1+t^\alpha)(1+t^\beta)}$，由于 $0<t<1,\beta>\alpha>0$

$f'(t)>0$，$f(t)$ 区间 $[0,1]$ 单调递增，

当 $0 < t < 1$ 时，有： $f(t) > f(0) = 0$ ，即 $\frac{1}{\alpha}\ln(1+t^{\alpha}) > \frac{1}{\beta}\ln(1+t^{\beta})$

四、应用题

17. 求函数 $y = x - \ln(1+x)$ 的单调区间与极值。

解：函数 $y = x - \ln(1+x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上连续且可导

$y' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ ， $y' = \frac{x}{1+x} = 0$ ， $x = 0$

当 $-1 < x < 0$ 时， $y' < 0$ ， $y = x - \ln(1+x)$ 在区间 $(-1,0]$ 上单调递减

当 $x > 0$ 时， $y' > 0$ ， $y = x - \ln(1+x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

函数 $y = x - \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处有极小值 $y(0) = 0$

18. 试确定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中的 a、 b、 c、 d ，使得 $x = -2$ 处曲线有水平切线，$(1,-10)$ 为拐点，且点 $(-2,44)$ 在曲线上。

解： $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ， $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ ， $y'' = 6ax + 2b$ ，

由题意知 $y'(-2) = 0$ ，得 $12a - 4b + c = 0$

点 $(1,-10)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的拐点，

由题意知 $y''(1) = 0$ ，得 $6a + 2b = 0$

当 $x = 1$ 时 $y = -10$ ，得 $a + b + c + d = -10$

点 $(-2,44)$ 在曲线上，得 $-8a + 4b - 2c + d = 44$ ，

解方程组 $\begin{cases} 12a - 4b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \\ a + b + c + d = -10 \\ -8a + 4b - 2c + d = 44 \end{cases}$ ，得 $a = 1$、 $b = -3$、 $c = -24$、 $d = 16$

19. 要造一个圆柱形无盖的畜水池，容积为 $300m^3$ ，底面的造价是侧面造价的 2 倍，设侧面每平方米造价为 a 元 $/m^2$ 。

(1) 试将整个畜水池的造价 y 表示为底面半径 r 的函数；

(2) 问底面半径 r 为多大时，整个畜水池的造价最少？

解. 当畜水池的底面半径为 r ，其高为 $\frac{300}{\pi r^2}$ ，

整个畜水池的造价 $y=2a\pi r^2+2a\pi r\dfrac{300}{\pi r^2}=2a\pi r^2+\dfrac{600a}{r}$

$\dfrac{dy}{dr}=4a\pi r-\dfrac{600a}{r^2}$，令 $\dfrac{dy}{dr}=0$，$r=\sqrt[3]{\dfrac{150}{\pi}}$

$$\frac{d^2y}{dr^2}=4a\pi+\frac{1200a}{r^3}\quad \left.\frac{d^2y}{dr^2}\right|_{r=\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}}=12a\pi>0$$

$r=\sqrt[3]{\dfrac{150}{\pi}}$ 为函数 $y=2a\pi r^2+\dfrac{600a}{r}$ 的唯一极小值点

当 $r=\sqrt[3]{\dfrac{150}{\pi}}$ 时，函数 $y=2a\pi r^2+\dfrac{600a}{r}$ 有最小值，

最小值为 $y=900a\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{150}}$。