“互联网+”时代的出租车资源配置模型

摘 要

本题要求通过讨论“互联网+”对出租车的资源配置建立数学模型，解决如何衡量“供求匹配”程度，补贴方案对“缓解打车难”是否有帮助，以及新的补贴方案的设计与其合理性这三个问题。对上述问题求解的具体流程如下：

针对问题一：本文基于“供求匹配”程度公式，建立合理指标分析不同时空出租车资源配置。首先，收集数据并分析，以 6 个省份为例，固定同一省份一天中 5 个时间段，分别选取和建立出租车总数、空驶率、出租车承担率、总人口数等合理指标。然后，根据空驶率公式，分析建立不同时空的供给量模型，及需求量模型，而供求差值与需求量比的绝对值作为衡量“供求匹配”程度的指标ω。最后，使用 Matlab 编程求解ω，结果为，同一地区，早晚高峰时供求匹配程度较差；同一时段，北京、上海较其他研究城市供求匹配程度较好，但是观察总体数据，现阶段供求匹配程度还很差。

针对问题二：本文主要通过基于元胞自动机的计算机仿真解答出租车的补贴方案是否对“缓解打车难”有帮助的问题。首先，在对打车服务公司的补贴政策分析上，将补贴方案根据补贴对象、补贴额度划分为对乘客与司机给予高补贴、对司机给予高补贴和对司机给予低补贴三种补贴政策进行讨论。针对题目中的“打车难”，本文通过平均打车等待时间、空驶率等多个指标来进行衡量。模拟过程中，通过 Logistic 模型建立补贴额度和乘客的打车软件使用量关系模型，利用 Matlab 软件进行基于元胞自动机的计算机仿真模拟。最后，由仿真结果得出：低额补贴对“缓解打车难”有帮助。

针对问题三：本文主要通过问题二中计算机仿真得出的数据，建立多目标规划模型，求得补贴总支出和打车难度最低情况下的最优解。首先，从出租车公司和乘客的角度出发，本文得出两个目标：补贴总支出最低和打车难度最低。然后，利用计算机仿真指标，列出约束条件。最后，通过建立多目标规划方程，利用 lingo 软件求解出目标最优时的司机补贴额度为 5 元/单，空驶率为 29%，并对结果进行了合理性分析。

关键词:“供求匹配” Logistic 模型 元胞自动机 计算机仿真 多目标规划

一、 问题重述

出租车是市民出行的重要交通工具之一，“打车难”是人们关注的一个社会热点问题。随着“互联网+”时代的到来，有多家公司依托移动互联网建立了打车软件服务平台，实现了乘客与出租车司机之间的信息互通，同时推出了多种出租车的补贴方案。

请你们搜集相关数据，建立数学模型研究如下问题：

(1) 试建立合理的指标，并分析不同时空出租车资源的“供求匹配”程度。

(2) 分析各公司的出租车补贴方案是否对“缓解打车难”有帮助？

(3) 如果要创建一个新的打车软件服务平台，你们将设计什么样的补贴方案，并论证其合理性。

二、 问题假设

（1）出租车已成为市民出行的重要交通工具，作为市民出行方式之一。

（2）假设所研究城市的所有出租车均出车，原因是未出车率较小，不计入模型计算。

（3）假设空驶的出租车不会以任何理由拒载，即空驶出租车为供给量。

（4）假设不计通过步行和自行车出行的人数，因为他们多为短途行程，对所求影响较小。

（5）假设一个人拥有一辆私家车，则他的出行交通工具为私家车并不再改变，因为此时他乘坐公共交通工具的次数很少。

（6）乘客、司机的软件使用量的增长率为乘客数量的线性函数。

（7）假设出租车司机不会违反规定进行人为刷单。

（8）不考虑乘客或出租车司机失约等特殊情况。

三、符号说明

符号	含义
P_i	第i个城镇总人口数
A_i	第i个省份总成年人数
B_i	第i个省份私家车保有量
r_{ij}	第 i 个省份第 j 个时间段平均出租车空驶率
n_i	第 i 个省份总出租车数
t_j	一天当中第 j 个时间段出租车平均运营时间

v_j	第 j 个时间段出租车平均运营车速
l_i	出租车总有效行驶里程
m_i	城市居民人均日出行次数
L_i	城市居民平均以出租车方式出行的距离
k_j	第 j 个时间段城市居民乘坐出租车时平均有效车次载客人数
q_i	第 i 个省份选择出租车（准公共交通）的出行方式的居民的出行总量
Q_i	第 i 个省份选择总公共交通（地面公交和轨道交通）的出行方式的居民的出行总量
α_j	为第 j 个时间段的需求量的权值
S_{ij}	第 i 个省份第 j 个时间段空驶的出租车
D_{ij}	第 i 个省份第 j 个时间段打车人数
μ_i	城市居民出行方式结构中出租车所占的比例
ω_{ij}	供求匹配程度
Pa	乘客的软件使用量
Ca	司机的软件使用量
m	补贴额度
$rate1(Pa)$	乘客的软件使用量的增长率
$rate2(Ca)$	司机的软件使用量的增长率
$Level$	打车难度
UR	司机软件使用率
EP	补贴支出
m	补贴额度
cf	出租车客运量
nw	软件打车等待时间
nlw	非软件打车等待时间

四、问题分析

4.1 问题一分析

问题一需要建立不同时间和空间下的出租车资源的“供求匹配”程度的模型，其中“不同时空”表示的含义为不同一天中不同时间段、不同省份，本文根据省

份的 3 个级别，选 6 个代表省份，再分为一天中 5 个时间段进行讨论。

首先，收集分析相关指标的数据。其次，根据空驶率和总出租车数建立不同时空城市出租车供给分析模型。

然后，因为一个省份的出租车需求主要和该省份的成人数和开私家车出行的人数有关，从而建立不同时空的城市出租车需求分析模型。

最后，将供给量和需求量差的绝对值与需求量的比例作为“供求匹配”程度。

为了建立以上模型，本文通过对其影响因素的分析与文献的查阅，归纳出六个指标：出租车在公共交通工具中的分担率、人口年龄结构、总人口数、出租车空驶率、私家车数量、出租车数量。因为空驶率数据较难得到，本文根据其他易统计得到数据的指标列出空驶率的计算公式。最后总结各指标数据于表格，带入公式求解“供求匹配”程度。

4.2 问题二分析

题目要求分析各公司的补贴方案是否对“缓解打车难”有帮助。由于各公司在各个时间段的补贴政策相同，因此可以将所有公司当作一个公司。

对于题目中的“补贴方案”，我们将其划分为对乘客与司机的高补贴和低补贴两个方面的方案。然后，对补贴额度和乘客与司机的软件使用量分析：随着补贴额度的上升，乘客与司机的软件使用量在开始阶段都会快速增长；然而，由于总人口数量以及经济发展水平等因素，都会对其增长起到阻滞作用。其阻滞作用体现在乘客与司机的软件使用量的快速增加，尽管会使得公司利润增加，但固定的补贴额度 m 与用户量的增加会导致公司成本上升，从而出租车公司降低补贴额度 m。因此，可以通过微分方程法对其建立 Logistic 模型。

对于题目中的“缓解打车难”问题，我们通过将空载率、叫车平均等待时间、平均客运量作为衡量指标，分析不同补贴方案对于打车难问题的影响。通过元胞自动机建立计算机仿真模型，模拟出租车与乘客一天内的状态变化，求出乘客出租车的状态变化趋势与各项指标的平均值，进而分析各种补贴方案能否缓解打车难问题。

说明：各公司在各个时间段的补贴方案相同。

理由：首先，通过快的公司和滴滴公司融合前后的补贴方案的数据发现这两个公司的补贴方案完全相同；然后，运用反证法进行分析：若各公司补贴方案不同，则客户和司机都会使用补贴方案最利于自己的打车软件，从而导致其他公司失去市场，这显然是不可能的。因此，各公司都会保持补贴方案一致。

4.3 问题三分析

通过对第二问模型分析可知，对乘客进行打车补贴会提高打车人数，不仅不利于打车难”现象的缓解，而且造成打车平台大量支出。而对司机补贴的主要目的在于保持软件在司机群体中的使用率，而非缓解“打车难”现象。在占有一定市

场份额后，打车软件只需维持司机群体的使用率，就可以保证乘客与司机总体使用量保持在较高水平。根据模型 2.1, 2.2 模拟出司机补贴额度与司机软件使用量、司机补贴额度与出租车客运量、司机补贴额度与空驶率、空驶率与软件打车、非软件打车等待时间的函数关系，并将其作为约束条件。所以应采取对司机的单向补贴政策，同时调整司机补贴额度，来平衡打车软件在司机群体中的使用率与打车平台补贴支出。最后，通过建立多目标规划方程，求解出最优目标时的司机补贴额度与空车率。

针对现有打车平台补贴产生的问题进行总结分析，在原有补贴方案模型上进行调整改进。如：通过区分“车单”优劣程度给予不同额度的补贴、固定出租车打车点打车补贴等。

五、模型建立与求解

5.1 问题一模型

本文根据城市 3 个级别，选则 6 个代表城市，按照研究顺序分别为北京、上海、安徽、河北、黑龙江、海南，将一天分为 5 个时间段，分别为 6：00-8：00，11：00-13：00，16：00-18：00，18：00-20：00，21：00-23：00（其中 6:00-8:00 为早高峰，18:00-20:00 为晚高峰），因此下述 i=1,2,3,4,5,6,而 j=1,2,3,4,5。

5.1.1 不同时间城市出租车供给的分析模型

由题意知，交通运输的需求与供给是相互联系又相互区别的概念，其中交通运输的供给是愿意并且能够提供的空间移动。

在本文中，影响城市出租车供给的因素有城市人口规模、城市出租车数目、出租车空驶率等。

首先，查阅数据，得到第 i 个省份的出租车数目n_i。

然后，考虑第 i 个城市平均出租车空驶率：

指非营业里程与总行驶里程之比，一般以一辆车为单位，公式为：

$$\text{空驶率} = \text{非营业里程（公里）} / \text{总行驶里程(公里)} \times 100\%$$

但是，由于很难直接得到出租车的空驶率r_{ij}的数据，经过查阅相关研究和数据，在出租车乘客需求量、乘客平均出行距离确定的情况下，出租车的空驶率和出租车的总量之间满足如下关系式[2]：

$$l_{ij} = \frac{p_i \cdot m_i \cdot \mu_i \cdot L_i}{k_j} \tag{1.1}$$

$$r_{ij} = \frac{t_j \cdot v_j \cdot n_i - l_{ij}}{t_j \cdot v_j \cdot n_i} \tag{1.2}$$

其中，r_{ij}为第 i 个城市第 j 个时间段的空驶率;

n_i为城市出租车总量;

t_j为一天当中第 j 个时间段出租车平均运营时间;

v_j为第 j 个时间段出租车平均运营车速;

l_i为全市出租车总有效行驶里程;

P_i为城市居民人口总量;

m_i 为城市居民人均日出行次数;

μ_i为城市居民出行方式结构中出租车所占的比例;

L_i为城市居民平均以出租车方式出行的距离;

k_j 为第 j 个时间段城市居民乘坐出租车时平均有效车次载客人数。

最后可以得到第 i 个城市第 j 个时间段空驶的出租车数，即供给量，公式为：

$$S_{ij} = n_i \cdot r_{ij} \tag{1.3}$$

5.1.2 不同时间的城市出租车需求分析模型

交通运输中的需求是指有意愿能够支付得到空间移动，本文涉及的主要影响需求的因素有根据年龄的城市人口分布、私家车保有量、出租车在总公共交通工具中的分担率。

不同的城市按年龄的人口分布、人均 GDP 等信息均不同，从而影响成年人数目、私家车保有量，再根据假设（5），得到出行交通工具为私家车的人数。

通过查阅资料，得知出租车为准公共交通工具，而总公共交通工具包括准公共交通工具和公共交通工具（地面公交和轨道交通）。

然后，分析得各影响因素关系如下：

$$\rho_i = \frac{q_i}{Q_i} \tag{1.4}$$

$$R_{ij} = \rho_i \cdot \alpha_j \tag{1.5}$$

其中， ρ_i第 i 个城市出租车在总公共交通工具中的分担率，R_{ij}为第 i 个城市第 j 个时间段出租车在总公共交通工具中的分担率，q_i为第 i 个城市选择出租车（准公共交通）的出行方式的居民的出行总量，Q_i为第 i 个城市选择总公共交通（地面公交、轨道交通和出租车）的出行方式的居民的出行总量，α_j为第 j 个时间段的需求量的权值。

又由前面分析，私家车保有量为以私家车为出行方式的居民数，由此可得第 i 个城市第 j 个时间段打车人数，即需求量:

$$D_{ij} = (A_i - B_i) \cdot R_{ij} \tag{1.6}$$

其中，A_i为第i个省份总成年人数；B_i为第i个省份私家车保有量。

5.1.3“供求匹配”程度公式

由以上所有公式，再效仿数值分析中相对误差的计算公式，以增加准确性，最后可得供求匹配程度ω_{ij}的公式：

$$\omega_{ij} = \left|\frac{D_{ij}-S_{ij}}{D_{ij}}\right| \tag{1.7}$$

ω_{ij}越小则匹配程度越高。

5.1.4 模型求解

第一步：数据收集与分析

经网络查询，统计数据可得一般情况下打车等待时间的不同比例，以及所研究城市的出租车计价方式，可以求得所研究城市的居民平均搭乘出租车的距离，各指标统计计算表格如下：

表 1.1 每次打车产生的费用所占百分比

百分比	1.4%	4.8%	11.8%	73.4%	8.6%
每次打车产生的费用	100 元以上	50-100 元	30-50 元	起步价-30 元	起步价

表 1.2 不同城市出租车计价方式

城市	出租车计价方式
北京	3 公里以内收费 13 元，基本单价 2.3 元/公里，燃油附加费 1 元
上海	3 公里以内收费 14 元，基本单价 2.4 元/公里，燃油附加费 1 元，10 公里以上 3.6 元
河北	3 公里以内收费 8 元，基本单价 1.6 元/公里，燃油附加费 0 元
安徽	2.5 公里以内收费 6 元，基本单价 1.2 元/公里，燃油附加费 2 元
海南	3 公里以内收费 10 元，基本单价 2 元/公里，燃油附加费 1 元
黑龙江	3 公里以内收费 5 元，基本单价 1.6 元/公里，燃油附加费 0 元

表 1.3 城市交通客运量

单位：万人次

城市	城市居民总流量	出行方式			
		公共汽电车	轨道交通	出租汽车	私家车
北京	2825.176	1326.866	877.9973	191.6329	428.68
上海	1878.005	742.5973	686.6521	294.8356	153.92
河北	1456.989	611.8767	\	390.5123	454.60
安徽	1352.033	670.3452	\	509.3973	172.29
海南	208.3831	131.0849	\	42.40822	34.89
黑龙江	1938.094	695.9205	3.827397	850.5753	164.54

表 1.4 不同城市个影响因素

指标体系	北京	上海	河北	安徽	海南	黑龙江
P_i	1783.47	2125.72	3410.55	2673.66	443.06	3054
A_i	1622	1870	5384	4275	626	2166.21
n_i	4286759	1539200	4546000	1722900	348900	1645400
B_i	66646	50007	46016	36681	3978	61129

其中，P_i为城市居民人口总量（万人）；A_i为第i个省份总成年人数（万人）；n_i为城市出租车总量（辆）；B_i为第i个省份私家车保有量（辆）

第 j 个时间段的需求量的权值α_j依次分别 0.3、0.2、0.1、0.3、0.1

城市居民人均日出行次数$m_i = 2$（次）

以上数据均为中国知网中统计年鉴、中经统计网和网络查询得到，具体地址放于参考文献中。

第二步：城市居民平均以出租车方式出行的距离求解

根据表 1.1 和表 1.2 计算城市居民平均以出租车方式出行的距离，以北京为例，计算过程如下：

由于北京出租车计价方式 3 公里以内收费 13 元，基本单价 2.3 元/公里，燃油附加费 1 元。

若打车花费的价格为 30 元，则该价格下的行驶公里数：

$$（30-13-1）/2.3=8（公里）$$

$$8+3=11（公里）$$

那么计算出花费 100 元、50 元、30 元、起步价的公里数分别为 40.82、18.65、11、3。然后以 50-100 元为例，其平均公里数为（18.65+40.39）/2=29.52（公里）

最后，以各区间段的平均公里数和各区间短所占百分比，可得北京居民平均以出租车方式出行的距离，计算方式如下：

40.39×1.4%+29.52×4.8%+14.83×11.8%+7×73.4%+3×8.6%=9.12（公里）

表 1.5 不同城市价格换算成的距离数

单位：公里

城市	100 元以上	50-100 元	30-50 元	起步价-30 元	起步价
北京	40.39 公里以上	18.65-40.39	11-18.65	3-11	3
上海	30.22 公里以上	16.33-30.22	9.25-16.33	3-9.66	3
河北	60.5 公里以上	29.25-60.5	16.75-29.25	3-16.75	3
安徽	79.17 公里以上	37.5-79.17	20.83-37.5	2.5-20.83	2.5
海南	47 公里以上	22.5-47.5	12.5-22.5	3-12.5	3
黑龙江	62.38 公里以上	31.13-	18.63-31.13	3-18.63	3

按照以上方式计算出，以北京、上海、河北、安徽、海南、黑龙江的顺序，城市居民平均以出租车方式出行的距离分别为 9.12、7.95、13.22、16.13、10.35、14.25（公里）

第三步：根据城市交通客运量求解相关指标

根据表 1.3，可以近似求出第 i 个城市出租车在总公共交通工具中的分担率 ρ_i，及城市居民出行方式结构中出租车所占的比例 μ_i，计算方法如下：

$$\rho_i = \frac{出租车}{公共交通 + 出租车}$$

$$\mu_i = \frac{出租车}{公共交通 + 出租车 + 私家车}$$

求得的结果放于下述表格 1.6 中。

第四步：供求匹配程度公式的求解

根据不同城市不同时间段的各指标，带入公式(1.1)-(1.7)，可求得城市出租车需求量、供给量及匹配程度，再使用 Matlab 求解，指标值及具体求解表格如下：

表 1.6 不同城市影响指标及具体数据

指标体系	北京	上海	河北	安徽	海南	黑龙江
P_i	1783.47	2125.72	3410.55	2673.66	443.06	3054.00
A_i	1622.00	1870.00	5384.00	4275.00	626.00	2166.21
n_i	4286759.00	1539200.00	4546000.00	1722900.00	348900.00	1645400.00
B_i	66646.00	50007.00	46016.00	36681.00	3978.00	61129.00
ρ_i	0.09	0.21	0.64	0.76	0.32	0.92
μ_i	0.07	0.16	0.27	0.38	0.20	0.50
L_i	9.12	7.95	13.22	16.13	10.35	14.25

表 1.7 不同时间段影响指标及具体数据

影响指标	6：00-8：00	11：00-13：00	16：00-18：00	18：00-20：00	21：00-23：00
出租车平均运营时间（小时）	2	1	1.5	2	1.5
城市居民乘坐出租车时平均有效车次载客人数（人）	3	1	2	3	2
出租车平均运营车速（小时/公里）	15	40	25	15	45

表 1.8 不同时空出租车需求量

单位：人

城市	6：00-8：00	11：00-13：00	16：00-18：00	18：00-20：00	21：00-23：00
北京	311148.8	207432.5	103716.3	311148.8	103716.3
上海	1062015	708010.1	354005	1062015	354005
河北	9438134	6292089	3146045	9438134	3146045
安徽	9352984	6235323	3117661	9352984	3117661
海南	573702.8	382468.5	191234.3	573702.8	191234.3
黑龙江	5497859	3665239	1832620	5497859	1832620

表 1.9 不同时空出租车供给量

单位：辆

城市	6：00-8：00	11：00-13：00	16：00-18：00	18：00-20：00	21：00-23：00
北京	66621.48	66488.39	66593.46	66619.73	66596.97
上海	49948.04	49627.98	49880.66	49943.83	49889.08
河北	45747.45	44289.62	45440.54	45728.27	45478.9
安徽	36319.93	34359.8	35907.27	36294.13	35958.85
海南	3957.261	3844.681	3933.56	3955.78	3936.523
黑龙江	60649.32	58045.32	60101.11	60615.05	60169.63

表 1.10 不同时空出租车供求匹配程度

城市	6：00-8：00	11：00-13：00	16：00-18：00	18：00-20：00	21：00-23：00
北京	0.7859	0.6795	0.3579	0.7859	0.3579
上海	0.9530	0.9299	0.8591	0.9530	0.8591
河北	0.9952	0.9930	0.9856	0.9952	0.9855
安徽	0.9961	0.9945	0.9885	0.9961	0.9885
海南	0.9931	0.9899	0.9794	0.9931	0.9794
黑龙江	0.9890	0.9842	0.9672	0.9890	0.9672

因为不同时空匹配程度ω的值越小，匹配程度越好，那么由 Matlab 计算数据及上表可以看出：

(1). $0 \leq \omega \leq 1$，并且需求量大于供给量。

(2).同一地点，在早、晚高峰期间的供求匹配程度比非高峰期间的供求匹配程度差。（6:00-8:00 为早高峰，18:00-20:00 为晚高峰）

(3).同一时间段，北京、上海比其他城市供求匹配程度好。

但是，从总体上看，现阶段出租车供求匹配程度很差。

5.2 问题二模型

5.2.1 基于元胞自动机的计算机仿真模型

通过元胞自动机模拟人口为 300 万城市的出租车--乘客状况，可研究不同时间出租车--乘客的状态与出租车--乘客一天的平均状态。从而判断补贴方式对打车难度的影响。

(1) 元胞：城市所有人群；

(2) 元胞空间：$n \times n$的二维矩阵空间；

(3) 邻居：出租车司机可以通过打车软件与乘客沟通，可以了解附近的乘客分布，所以邻居为半径为 1 的 Moore 型邻居；

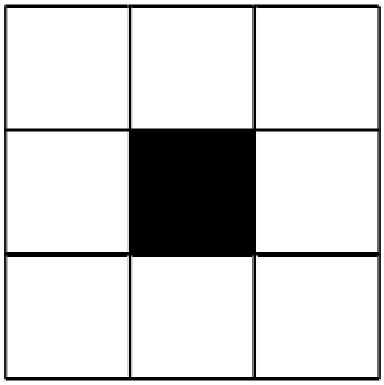

图 2.1　半径为 1 的 Moore 型邻居

(4) 元胞状态空间：设每个元胞的状态变量为$S_{\{i,j\}}(t)$，表示在$(i，j)$位置上的元胞 t 时刻的状态，其状态分为：0 状态 和 非 0 状态。0 状态表示此元胞所代表的单位空间内无乘客打车，非 0 状态表示此元胞所代表的单位空间内有$S_{\{i,j\}}(t)$个乘客打车。同时设定出租车数组，每个出租车元素指向一个元胞，每个出租车的状态变量$C_{\{i\}}(t)$ 表示在(i)位置上的出租车 t 时刻的状态。其状态为分为：0 状态----空载、非 0 状态----载客。其中非 0 状态下的状态变量$C_{\{i\}}(t)$表示：乘坐次辆出租车的乘客还要$C_{\{i\}}(t)\cdot h$时间到达目的地；

(5) 时间：设置 t 为记录时间，从早上六点开始，取 0.01h（6 分钟）为基本单位，每隔 0.01h（6 分钟）刷新一次乘客与出租车状态，直至晚上 22 点。

(6) 演化规则：初始 t=6 时，按照人口密度随机在二维空间选择 k 个元胞增加乘客，将对应元胞状态变量加一，即对应元胞区域乘客人数加一。随机将所有出租车分配到各个元胞，并设置状态变量为 0；

根据以下规则更新：

1)依次对出租车进行判断

a. 如果出租车状态变量不为 0 且小于等于单位时间 0.01h，即车上乘客在此次更新后到达目的地，设置出租车状态变量为 0。

b. 如果出租车状态变量大于单位时间 0.01h，即车上乘客在此次更新后仍不能到达目的地，将出租车状态变量减 0.01h。

c. 如果出租车状态变量为 0，此时出租车为空载。通过判断出租车所在元胞与附近元胞是否存在乘客。

- 如果存在乘客，设置出租车状态变量为当前地点到目的地点所需时间。并将出租车指向的元胞由当前地点改为目的地点。
- 如果不存在乘客，将出租车指向元胞由当前元胞随机改为附近元胞，状态变量仍为 0。

2)如果 t 小于 22，则 t 增加 0.01。如果 t 等于 24，程序结束。

(7) 边界处理：附加人为边界，边界不参与演变，即乘客与出租车不能初始

化在边界元胞，元胞标记始终为 0。

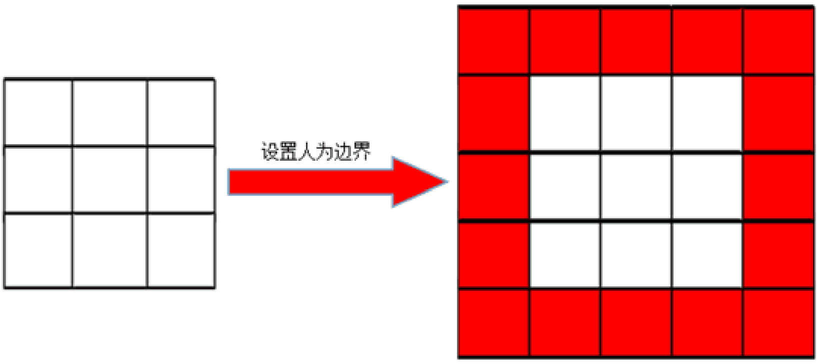

图 2.2 人为边界处理

5.2.2 基于 logistic 模型的软件使用量和补贴额度分析模型

logistic 模型是在 Malthus 模型的基础上增加了一个竞争项$-ax^2(a>0)$，其作用是产生阻滞。通过对于补贴方案的分析，可以做出如下假设：随着补贴额度 m 的增加，乘客的软件使用量 Pa 和司机的软件使用量Ca会快速增加。但是乘客的软件使用量 Pa 和司机的软件使用量Ca的提高，会对其的增加产生阻滞作用。从而可以建立下述模型：

(1) 乘客的软件使用量Pa和司机的软件使用量Ca对补贴额度m的变化率等于乘客增长率$rate1(Pa)$乘以乘客的软件使用量Pa

$$\frac{dPa}{dm} = rate1(Pa)\cdot Pa \tag{2.1}$$

$$\frac{dCa}{dm} = rate2(Ca)\cdot Ca \tag{2.2}$$

(2) 乘客的软件使用量的增长率$rate1(Pa)$与司机的软件使用量的增长率$rate2(Ca)$分别为乘客的软件使用量Pa和司机的软件使用量Ca的线性函数

$$rate1(Pa) = rate1_0 - s_1\cdot Pa \tag{2.3}$$

$$rate2(Ca) = rate2_0 - s_2\cdot Ca \tag{2.4}$$

其中$rate1_0, rate2_0$为固定增长率，表示补贴额度m很小时乘客的软件使用量 Pa 和司机的软件使用量Ca的增长率。

(3)补贴额度m和乘客与司机的软件使用量的函数关系求解

当$Pa = Pa_{max}$时乘客数量不再增长，即乘客增长率$rate1(Pa_{max}) = 0$，代入式(2.3)得$s_1 = \frac{rate1_0}{Pa_{max}}$，可以得到：

$$rate1(Pa) = rate1_0 \cdot (1 - \frac{Pa}{Pa_{max}}) \tag{2.5}$$

然后，将式(2.4)代入(2.1)可得：

$$\frac{dPa}{dm} = rate1_0 \cdot (1 - \frac{Pa}{Pa_{max}}) \cdot Pa \tag{2.6}$$

最后，由分离变量法可得：

$$Pa(m) = \frac{Pa_{max}}{1+(\frac{Pa_{max}}{Pa_0}-1)\cdot e^{-rate1_0 \cdot m}} \tag{2.7}$$

类似地，可以得到：

$$Ca(m) = \frac{Ca_{max}}{1+(\frac{Ca_{max}}{Ca_0}-1)\cdot e^{-rate2_0 \cdot m}} \tag{2.8}$$

其中Pa_{max}, Ca_{max}分别为有补贴方案时乘客与司机总人口数，Pa_0, Ca_0分别为无补贴方案时的乘客与司机的软件使用量。

5.2.3 基于元胞自动机的计算机仿真模型求解

第一步：对于基于 logistic 模型的乘客数量与补贴方案分析模型，用计算机仿真数据求得固定增长率$r_0 = 0.09\%$，并用式(2.6)构造计算机仿真中乘客数量关于补贴额度的函数。

第二步：基于元胞自动机理论，通过下列步骤进行求解：

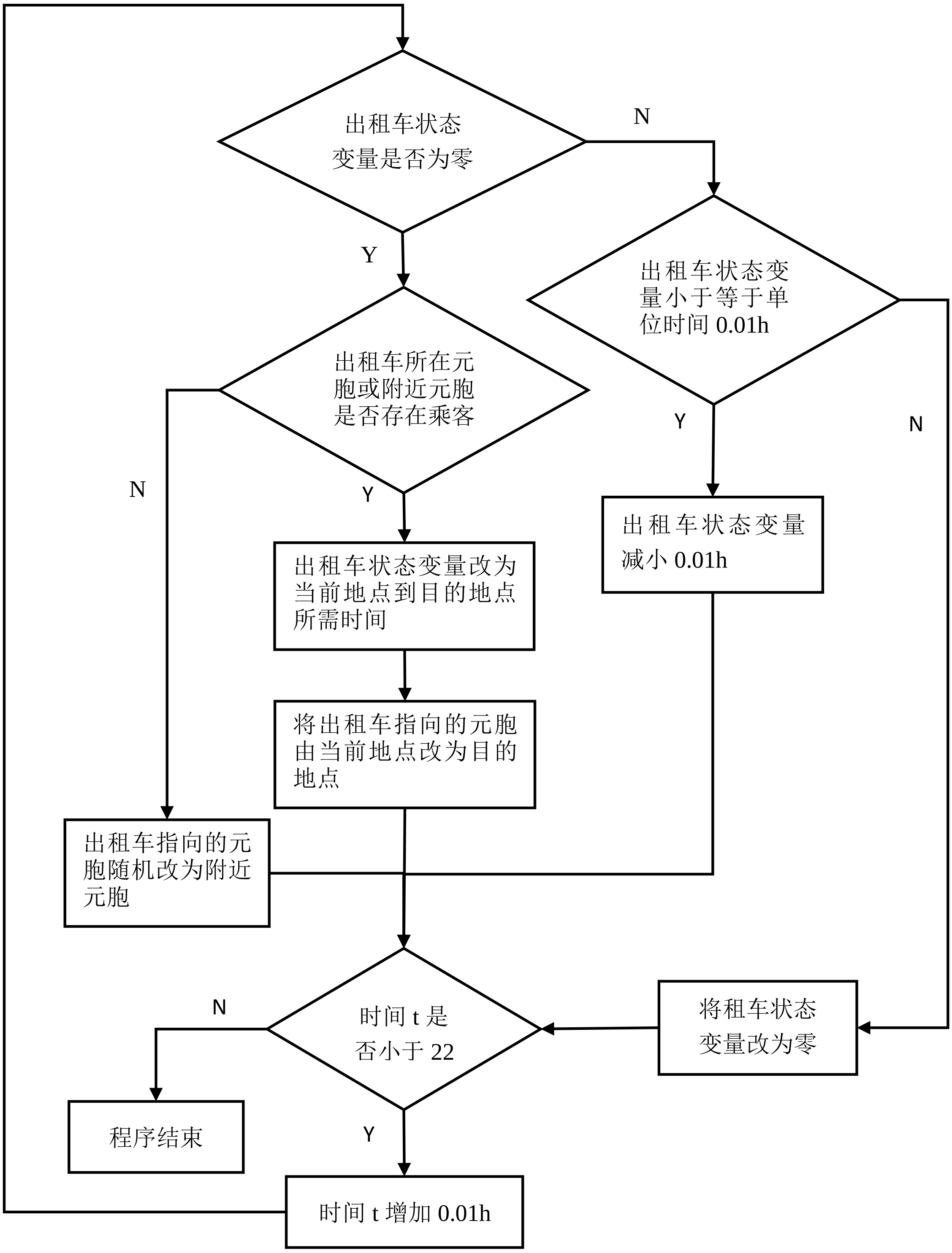

图 2.3 基于元胞自动机的计算机仿真步骤

第三步：通过使用 Matlab 软件进行计算机仿真，得到在设定打车软件使用率固定的情况下，不同补贴方案的模拟结果：

表 2.1 补贴金额与使用率的数据对应关系

补贴金额	20	10	6	2	1	0
司机群体打车软件使用率	90%	88%	80%	73%	61%	46%

表 2.2 计算机仿真结果

补贴方案	软件叫车平均等待时长	空驶率	非软件叫车平均等待时长	平均客运量	使用率
无打车平台	\	40.9%	16min	27.5	0%
高额司机乘客补贴	7.3min	18%	37min	33.5	80%
高额司机补贴	6.3min	23%	24min	28.4	80%
低额司机补贴	6.2min	28%	22min	27.7	70%
无补贴	6.2min	33%	19min	27.5	46%

对计算机仿真得到的数据进行分析：

1）高额的司机乘客双向补贴：相对于仅对司机补贴的情况可以大幅度降低空驶率，提高出租车利用率。但同时也提高了客运量，延长的打车平均等待时间（软件叫车、非软件叫车），不利于缓解打车难问题。

2）司机单向补贴：在固定使用率的前提下，相对于无补贴情况降低司机单向补贴额度会缓慢提高平均等待时间（软件叫车、非软件叫车）。但同事要考虑降低补贴所造成的司机用户的大幅流失，打车软件的使用率降低。根据司机软件使用量与补贴额度模型综合考虑，高额司机补贴、低额司机补贴政策可以缓解打车难问题。

3）根据乘客中打车软件的使用率对软件叫车平均等待时间与非软件叫车平均等待时长加权求得平均等待时间。如下表：

表 2.3 不同补贴方案对应平均等待时间

补贴方案	高额司机乘客补贴	高额司机补贴	低额司机补贴	无补贴
平局等待时间	13.24	9.84	10.94	13.11

综上所述，高额司机乘客补贴不利于缓解打车难问题，高额司机补贴、低额司机补贴政策可以缓解打车难问题。

第四步：不同补贴方案下的不同时间段空驶率的计算机仿真结果,这里只展示低额司机补贴的情况，其余情况放在附录中：

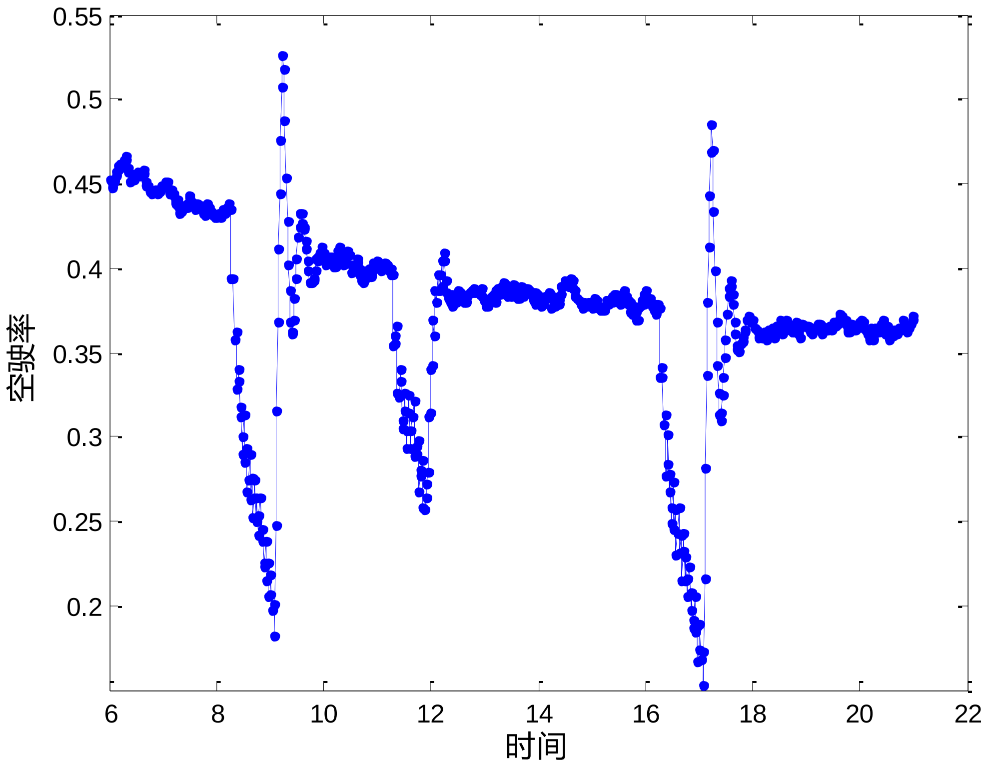

图 2.4 低额司机补贴下的不同时段的空驶率

5.3 问题三模型

5.3.1 基于多目标规划的最优补贴方案模型

首先，根据模型 5.2.1, 5.2.2 模拟出多组司机补贴额度、司机软件使用量、司机补贴额度、出租车客运量、空驶率、软件打车的平均等待时间与非软件打车的平均等待时间的数据。然后，分析并求出司机补贴额度与司机软件使用量、司机补贴额度与出租车客运量、司机补贴额度与空驶率、空驶率与软件打车、非软件打车等待时间的函数关系。建立多目标规划方程，求解出使得支出补贴最低与打车难问题缓解程度最优的补贴额度。目标规划模型如下：

目标 1：打车难问题缓解程度最优

$$\min Level = UR \cdot lw + (1 - UR) \cdot nlw \tag{3.1}$$

其中$Level$表示打车难度，UR表示司机软件使用率，lw和nlw分别表示软件打车等待时间和非软件打车等待时间（分钟）。

目标 2：补贴支出最低

补贴支出= 补贴额度×出租车客运量

$$\min EP = m \cdot cf \tag{3.2}$$

其中EP表示补贴支出（元），m表示补贴额度（元/单），cf表示出租车客运

量（次数），即每天的出租车总运营量。

约束条件 1：司机软件使用率＝ 司机软件使用量/出租车数

$$UR = \frac{Ca}{Ca_{max}} \tag{3.3}$$

约束条件 2：根据二八定律，假定司机软件使用率≥80%

$$UR \geq 80\% \tag{3.4}$$

约束条件 3：司机补贴额度与司机软件使用量的函数关系式

在模型二中，基于 logistic 模型求得式(2.8)如下：

$$Ca(m) = \frac{Ca_{max}}{1 + (\frac{Ca_{max}}{Ca_0} - 1) \cdot e^{-rate2_0 \cdot m}}$$

约束条件 4：在使用率固定的情况下，司机补贴额度与空驶率的函数关系在补贴额度为（0,20）区间内近似为线性关系

$$r = 40\% - 10\% \cdot UR - m \times 0.7\% \cdot UR \tag{3.5}$$

其中r为空驶率，Ca为司机补贴额度(元)

约束条件 5：空驶率与非软件打车等待时间的函数关系

$$nlw = 18 \cdot 40.9\%/r \tag{3.6}$$

约束条件 6：空驶率与软件打车等待时间的函数关系

$$lw = 2.0867 \cdot r^{-0.7013} \tag{3.7}$$

对约束条件 6 中的空驶率与软件打车平均等待时间分析：当空驶率为 0 时，软件打车平均等待时间为；当空驶率为 1 时，所有出租车都为空载状态，此时，软件打车平均等待时间应该为一个大于 0 的常数。由于函数$y = ax^{-b}$满足上述条件，因此，用函数$y = ax^{-b}$拟合模拟数据，得到式(3.7)。

综上所述，我们得到的多目标规划模型为：

$$\min Level = UR \cdot lw + (1 - UR) \cdot nlw \tag{3.8}$$

$$\min EP = m \cdot cf \tag{3.9}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} UR = \frac{Ca}{Ca_{max}} \\ Ca(m) = \frac{Ca_{max}}{1+(\frac{Ca_{max}}{Ca_0}-1)\cdot e^{-rate2_0 \cdot m}} \\ r = 0.4 - 0.1 \cdot UR - m \times 0.7\% \cdot UR \\ nlw = \frac{7.362}{r} \\ lw = 2.0867 \cdot r^{-0.7013} \\ UR \geq 0.8 \\ m, r \in R^+ \end{cases} \tag{3.10}$$

5.3.2 基于多目标规划的最优补贴方案模型求解

第一步：将多目标规划模型转化为单目标规划模型，转化后的结果为：

$$\min Z=\alpha\cdot\left(\frac{2.0867\cdot r^{-0.7013}\cdot-\frac{7.362}{r}}{1+\left(\frac{Ca_{max}}{Ca_0}-1\right)\cdot e^{-rate2_0\cdot m}}+\frac{7.362}{r}\right)+\beta\cdot m\cdot cf \tag{3.11}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} r=0.4-\dfrac{10\%+m\times 0.7\%}{1+\left(\frac{Ca_{max}}{Ca_0}-1\right)\cdot e^{-rate2_0\cdot m}} \\ m\geq\dfrac{\ln\left(4\cdot\left(\frac{Ca_{max}}{Ca_0}-1\right)\right)}{rate2_0} \\ m,r\in R^{+}\end{cases} \tag{3.12}$$

第二步：通过表 2.4 估计$\frac{Ca_{max}}{Ca_0}$和 $rate2_0$

任取表格中的两组数据，计算出C_6^2个 $\frac{Ca_{max}}{Ca_0}$和 $rate2_0$的值，然后取平均值作为估计值。

第三步：通过 lingo 软件计算出最优目标值

对于式(3.11)中的α、β分别取 0.5、0.5；

通过 lingo 编程解得：

表 3.1. 多目标规划计算结果

目标值	补贴额度（元/单）	空驶率
155.92	5.23	0.29

由于计算机仿真过程无法完全仿真真实过程，而且仿真过程中进行了部分简化，因此计算结果会有一些误差。但从上述结果来看，结果符合现实，具有一定的参考价值。

合理性分析：

1、打车服务平台补贴支出：打车服务平台对司机每单补贴 5 元，每天补贴 5 单。当前出租车的使用率为 77%，则平均对每辆出租车补贴额度为 5*5*77%=19.25（元）。中国共有 180 万辆运营的出租车，若向全国推广打车软件，则打车服务平台每天要支付 19.25*180 =3465（万元）补贴费用。

2、出租车司机增加的收入：无打车软件时，平均每天每辆出租车接 30 单，日收入在 150-200 元左右。通过给予补贴，空载率下降了 11.9%，平均每天可以多接 5.94 单。由于出租车每天出车费用固定，与空载率无关，所以此 5.94 单为纯利润。计算出每月打车软件的流量资费与智能机的折旧费合计约 200 元，另外出租车每天可额外获得平台补贴 25 元，由此计算出出租车司机每月增加的收入为：（5.94*14+25）*30-200 =3044.8 （元）。出租车司机原来平均每月收入为 5250 元，现收入为 8294.8 元，相比提高了 57.99%。

3、乘客平均打车等待时间：根据乘客中打车软件的使用率对非软件叫车平均等待时长、软件叫车平均等待时长加权求得打车平均等待时间为 77%*6.2+23%*20=9.374min。对比无补贴平均等待时间与不使用打车软件使得平均打车时间 13.11min、16min。分别降低了 29.50%、41.41%。

六、模型的评价与改进

6.1 模型的评价

1)优点

(1) 模型建立的合理性，模型的建立是在对收集的数据进行充分的挖掘的基础之上的，通过数据之间的关系提炼出各个变量之间的关系，并且是是按照问题的解决的思路进行的，直观地求出需求量和供给量，再效仿数值分析，将匹配程度表示为相对供求差，层次清晰易于理解。

(2) 对于问题二，第一，建立了补贴额度与软件使用量的 logistic 函数关系，而不是用仿真去得到数据进行拟合，使得仿真结果更加地精确。第二，采用基于元胞自动机进行仿真模拟，而不是 Monte Carlo 模拟，从而使得问题的解答更加生动，更加精确。

(3) 对于问题三，结合计算机仿真数据，建立多目标规划模型，使得对问题的求解更加地简单、准确。

2)缺点

(1) 由于本文中的统计数据部分采用人工合作统计，出租车平均里程数等值得精确性有待于加强。

(2) 本文中并没有过多地考虑影响供求量较小的指标，这会对模型产生一定误差。

6.2 模型的改进

针对于模型三中打车平台的现存问题，对其给出两点补贴方案，可以进一步在考虑这两点补贴方案的前提下对模型进行修改。

打车平台现存问题：

(1) 不使用软件打车人群（如中老年人等）打车难度大幅增加。

(2) 司机可以通过打车平台获取乘客目的地信息，引发挑客行为。

(3) 平台定位服务不准确，造成司机乘客相互寻找困难。

改进的补贴方案：

(1) 市中心建立固定打车点，并在打车点设立打车呼叫按钮，对打车点打车乘客与接客司机提供补贴。既降低了不使用软件打车人群打车的难度，又方便了乘客与司机相互寻找。

(2) 由于乘客的目的地、乘坐距离不同，可以通过历史数据，将打车单分为好单、中单、差单，分别设置不同补贴额度。从而降低“车单”间的差异，减少挑单情况。

七、参考文献

[1] 陈明艺. 出租车数量管制的合理性分析及评估机制研究[J]. 中国物价，2006 年第 8 期.

[2] 王昊, 王炜, 陈峻, 徐任婷. 城市出租车交通分布预测模型[J]. 公路交通科技，2006 年

[3] 常超凡，陈团生，刘明君，高峰. 城市出租车拥有量对分担率影响分析[J]. 交通科技与经济，2007年第3期

[4] 肖华勇. 大学生数学建模竞赛指南[M], 北京：电子工业出版社, 2015

[5] 段晓东, 王存睿, 刘向东. 元胞自动机理论研究及其仿真应用[M], 北京：科学出版社, 2012

[6] 中国经济与社会发展统计数据库. 中国循环经济年鉴, 2014, http://tongji.cnki.net/kns55/brief/result.aspx

[7] 中国经济与社会发展统计数据库.中国交通年鉴, http://tongji.cnki.net/kns55/Navi/result.aspx?floor=1&id=N2014120146&file=N2014120146001448&uid=WEEvREcwSlJHSldRa1FiNk1zZnFtcUZ3V251VzFXUHE3ajlnNWExVk5Xck82RlZyUDZCRWpCVFhQUnhHVy9NSkxnPT0=$9A4hF_YAuvQ5obgVAqNKPCYcEjKensW4IQMovwHtwkF4VYPoHbKxJw!!

[8] 中经网产业数据库.http://cyk.cei.gov.cn/aspx/Subject.aspx?NodeURL=jt

[9] 和讯宏观数据网.http://calendar.hexun.com/area/dqzb_110000_D0880000.shtml

附录一：不同时段不同补贴方案下的空驶率图像

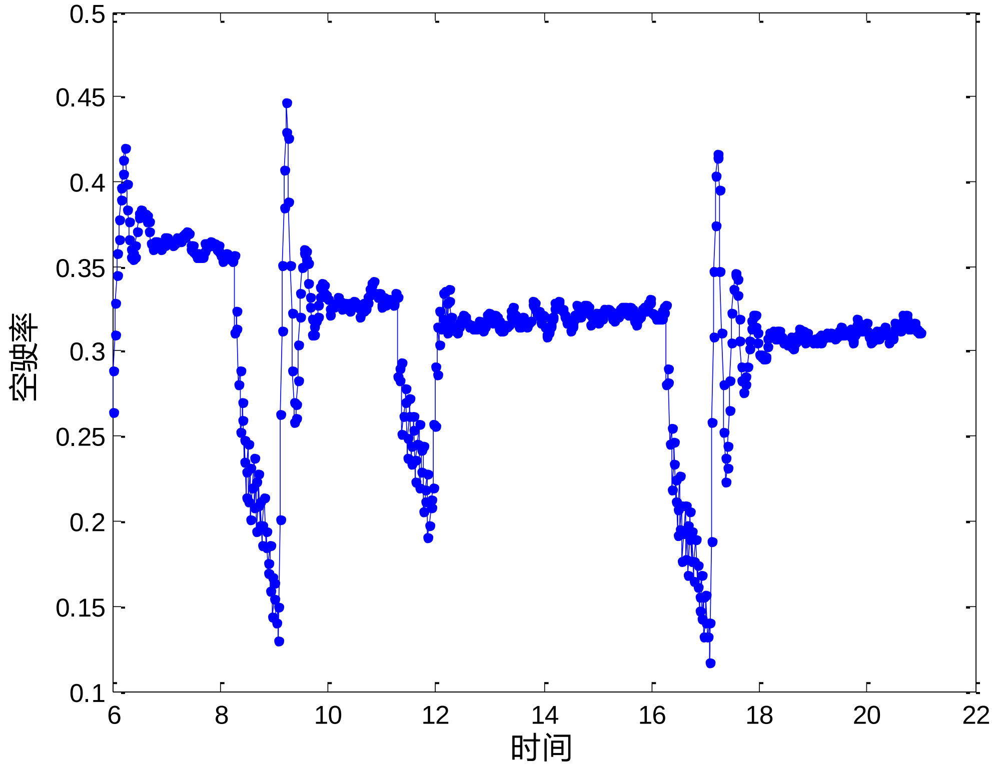

图 1. 无补贴下的不同时段的空驶率

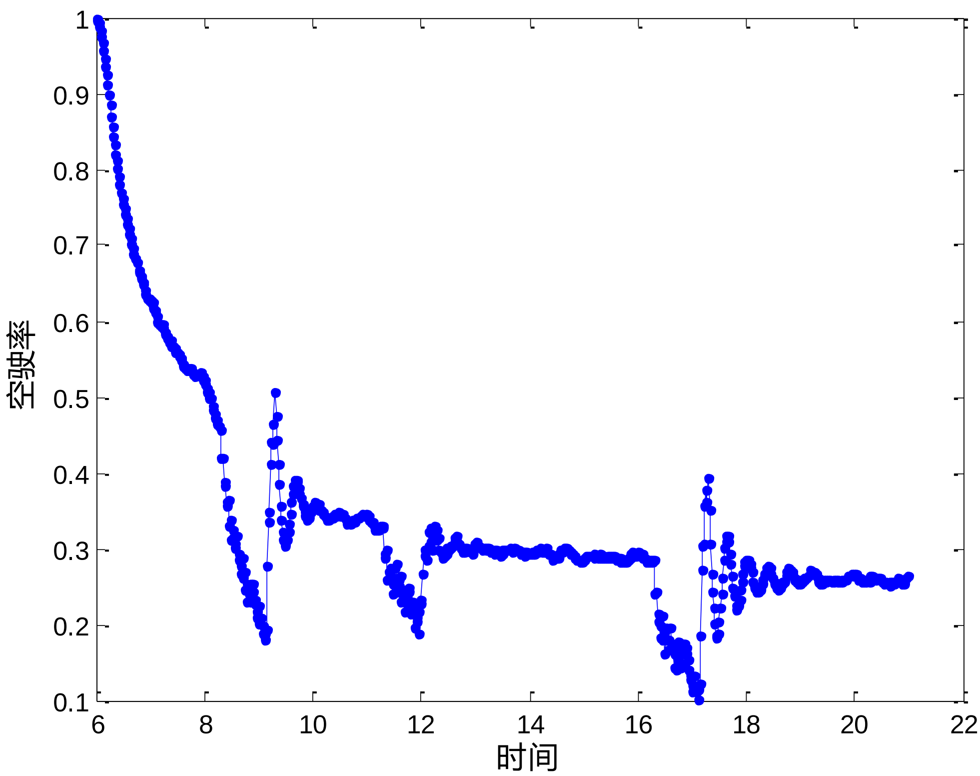

图 2. 高额司机补贴下的不同时段的空驶率

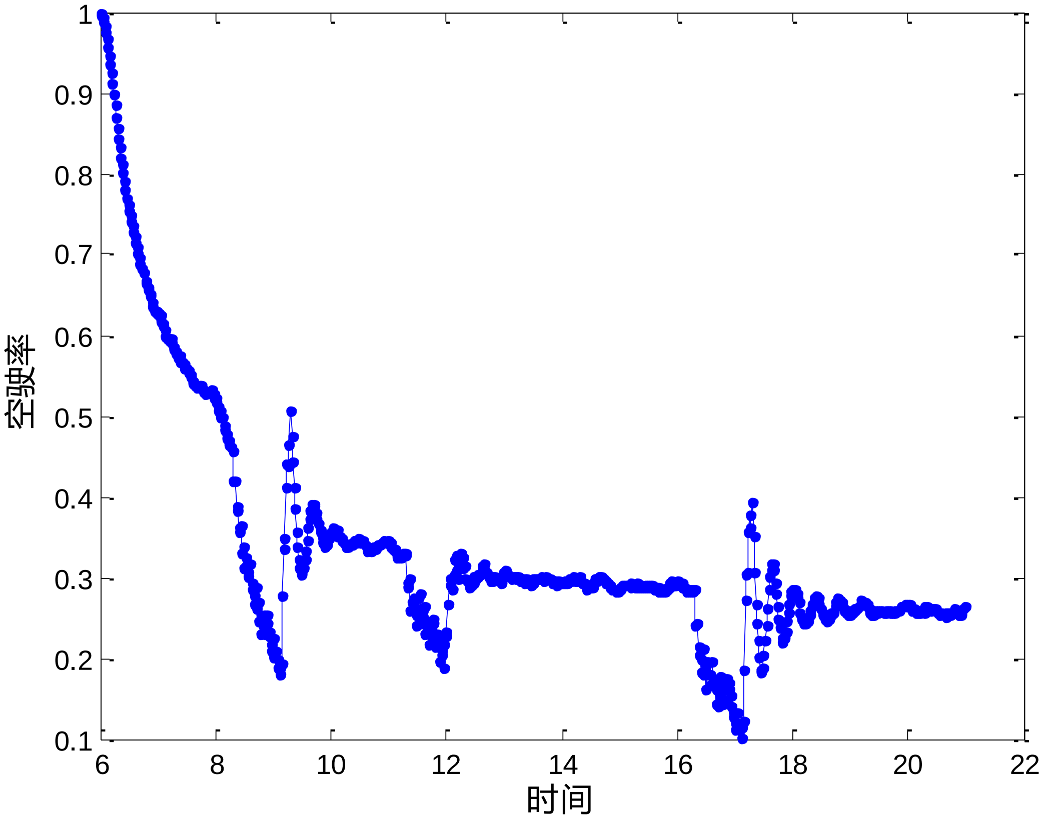

图 3. 高额司机乘客补贴下的不同时段的空驶率

附录二：基于元胞自动机的计算机仿真代码

b2015.m

```
tic
for i=1:cnum
    chzch(i,1) = randi(num,1);
    chzch(i,2) = randi(num,1);
end
cknum = rnum .* dcl./(10*(1./lj));

b = 0;
for i=time:lj:22
    if ceil(i) == 10 || ceil(i) == 18
        for j=1:cknum
            dx = randi(num,1);
            dy = randi(num,1);
            dt(dx,dy) = dt(dx,dy) + 1;

        end
        for j=1:cknum
```

```
            dx = randi(num1,1);
            dy = randi(num1,1);
            dt(dx,dy) = dt(dx,dy) + 1;
        end
    elseif  ceil(i) == 13 || ceil(i) == 11|| ceil(i) == 19
        for j=1:cknum
            dx = randi(num,1);
            dy = randi(num,1);
            dt(dx,dy) = dt(dx,dy) + 1;
        end
        for j=1:cknum./2
            dx = randi(num1,1);
            dy = randi(num1,1);
            dt(dx,dy) = dt(dx,dy) + 1;
        end
    else
        for j=1:cknum
            dx = randi(num,1);
            dy = randi(num,1);
            dt(dx,dy) = dt(dx,dy) + 1;
        end
    end
    for j=1:cnum
        if chzch(j,3) == 0
            if dt(chzch(j,1),chzch(j,2)) == 0
                chzch(j,1) = randi(num,1);
                chzch(j,2) = randi(num,1);
            else
                dt(chzch(j,1),chzch(j,2)) = dt(chzch(j,1),chzch(j,2)) -
1;
                chzch(j,1) = randi(num,1);
                chzch(j,2) = randi(num,1);
                if ceil(i) == 10 || ceil(i) == 18
                    ggg = zdsj + (0.5 - abs(i-ceil(i)+0.5))./1.5;
                    chzch(j,3)= ggg;
                elseif ceil(i) == 13
                    ggg = zdsj +(0.5 - abs(i-12.5))./3;
                    chzch(j,3) = ggg;
                else
                    chzch(j,3) = zdsj;
                end
            end

        else
```

```
            if chzch(j,3) > lj
                chzch(j,3) = chzch(j,3) - lj;
            elseif dt(chzch(j,1),chzch(j,2)) == 0
                chzch(j,3) = 0;
            else
                dt(chzch(j,1),chzch(j,2)) = dt(chzch(j,1),chzch(j,2)) -
1;
                chzch(j,1) = randi(num,1);
                chzch(j,2) = randi(num,1);
                if ceil(i) == 10 || ceil(i) == 18
                    ggg = zdsj + (0.5 - abs(i-ceil(i)+0.5))./1.5;
                    chzch(j,3)=ggg;
                elseif ceil(i) == 13
                    ggg = zdsj +(0.5 - abs(i-12.5))./3;
                    chzch(j,3) = ggg;
                else
                    chzch(j,3) = zdsj;
                end
            end
        end
    end
    b = b+1;
    kzl(b) = getkong(chzch)./cnum;
end
datakzl = sum(kzl)/(750/(lj/0.02)+1);
s=zeros(ceil(16*(1./lj)),1);
for k=1:b
   s(k) =(1- kzl(k)).*cnum;
end
toc
```

getkong.m

```
function [ n ] = getkong( chzch )
n = 0;
for i=1:length(chzch)
    if chzch(i,3) == 0 || chzch(i,3) == -1
        n = n + 1;
    end
end
```

data.m

```
num = 1000;
num1 = 100;
```

```
lv = 0.3;
md1 = 8;
md2 = 3;
rnum = num.*num.*md2 + num1.*num1.*(md1-md2);
time = 7;
v = 45;
vd = 20;
cnum = 15000;
dt = zeros(num);
chzch = zeros(cnum,3);
dcl = 0.09;
lj = 0.01;
dtime = 0;
ktime = 0;
kzl = zeros(ceil(16*(1./lj)),1);
datakzl = 0;
datadeng = 0;
zdsj = 0.3;
```

graph.m

```
xxx = (0:lj:22)+6;
   plot(xxx(1:length(nonzeros(kzl))),nonzeros(kzl),'-b.');
ylabel('空驶率')
xlabel('时间')
```