

基于模糊多目标规划的出租车补贴模型

摘要

出租车“打车难”是当前社会的热点话题，乘客与出租车的供需不匹配也成为实现他们信息互通的障碍，随着多家公司建立打车软件服务平台，推出多种出租车补贴方案，出租车和乘客间的供需匹配问题逐渐成为“互联网+”时代的重要课题之一。本文以上海市为例，通过出租车和乘客供求平衡指标，构建基于模糊多目标规划和层次分析法的出租车资源供求匹配模型，并设计新的补贴方案，从而有效缓解“打车难”问题。

针对问题一，首先从苍穹滴滴快的智能出行平台和数据堂网站搜集相关数据，分析反映出租车资源供需匹配程度的 5 个指标。由于数据存在一定的模糊性，本文利用连续区间有序加权平均（COWA）算子将相关指标转化为含参变量的实指标，通过 K 均值聚类模型将上海的出租车分布和乘客需求量进行聚类，并构建基于空车率、空车总代价、乘客总成本的模糊多目标规划模型，同时，利用基于 COWA 算子的模糊层次分析法将模糊多目标规划模型转化为单目标规划模型，结果表明，上海地区呈现供不应求的出租车资源分布状况，并且在上下班高峰期时间段显得尤为突出。

针对问题二，通过在模糊多目标规划模型中增加补贴方案，重新求解模型，并分析出租车等待时间、乘客等待时间、空车率的变动，结果表明，适当的补贴能够在一定程度上提高供求匹配程度，缓解“打车难”的问题；然而一旦超过一定补贴范围，出租车的供给与乘客的乘车需求匹配程度就会下降。

针对问题三，根据乘客与出租车的距离、单位出租车服务人数、乘车费用、乘客人数等因素，构建新的补贴方案，并重新求解模糊多目标规划模型，结果表明，新的补贴方案能有效地缓解“打车难”问题，模型结果也同时验证了补贴方案的合理性。

最后，本文对所建模型进行了灵敏度分析，并对模型进行了优缺点分析。

关键词：多目标优化；层次分析法；供求匹配；补贴；COWA 算子。

一、问题重述

随着信息技术的飞速发展，出租车已经成为了现代生活出行必不可少的交通工具，极大的方便了我们的日常生活。过去，乘客用传统的方式在街上寻找空的出租车，但是在拥堵路段、重要节假日以及上下班高峰期或是遇上恶劣天气时打车会产生效率低、乘客等待时间长等问题，打车难已经成为国内一二线城市的普遍现象，也是人们关注的一个社会热点问题。随着“互联网+”时代的到来，即把互联网技术与传统产业相结合，不断创新发展，有多家公司依托互联网建立了打车服务平台。其中有两家占据了手机打车市场 80%以上的份额，他们分别是阿里巴巴集团的快的打车和腾讯公司的滴滴打车。这些打车软件转变了传统的打车模式，用户通过打车软件可以便捷地通过手机发布位置信息吸引周边的空车司机，司机抢单后能及时与司机进行沟通，极大地提高了打车效率。同时为了鼓励司机和乘客使用这些打车客户端，阿里巴巴和腾讯分别推出了针对司机和针对乘客不同的补贴方案。打车软件满足了用户和司机的共同需求，降低了出租车的空载率，提高了乘客的打车率。它们的出现正是满足了人们对市场需求的积极响应，是“互联网+”时代发展的必然结果。

为了解决打车难这一社会问题并建立良好的市场竞争制度，本文着重通过搜集相关数据、建立合理的模型来解决下列问题：

- 问题 1:** 建立合理的指标，并分析不同时空出租车资源的“供求匹配”程度。
- 问题 2:** 分析各出租车公司补贴方案是否对“缓解打车难”有帮助。
- 问题 3:** 设计一种新的补贴方案，促进新的打车服务平台的创建，并论证其合理性。

二、问题分析

针对问题一，为了简化出租车运营系统，我们首先选取上海市 24 小时内出租车供给量和乘客需求量作为研究目标。然后，我们考虑乘客打车成本、出租车需求量、运营出租车总量、空车负效用及空车数量等 5 个指标，构建基于空车率、空车总代价、乘客总成本的模糊多目标规划模型。最后，利用基于 COWA 算子的模糊层次分析法将模糊多目标规划模型转化为单目标规划模型来反映上海市不同时空的出租车资源供求匹配程度。

针对问题二，我们选取滴滴快的打车软件公司为代表，将他们自创立以来对于乘客和司机不同的补贴方案进行分类。将补贴政策实行前后以及补贴金额的不

同时上海市空车数量、空车等待时间以及乘客等待时间进行对比分析，以此来反映上海市出租车资源供求分布情形。

针对问题三，考虑乘客与出租车的距离、单位出租车服务人数、乘车费用、乘客人数等因素，就上海市出租车资源供求关系分情况讨论，构建新的补贴方案，使供求匹配程度达到最大，然后重新求解模糊多目标规划模型。

三、基本假设

假设 1 乘客及出租车司机均能熟练使用打车软件；

假设 2 在某个特定区域内的所有地点出租车都可以到达；

假设 3 出租车司机以及乘客均为经济人，以自身利益最大化为导向；

假设 4 乘客出行均服从 *Origin – Destination* (OD) 出行需求路线；

假设 5 上海市内的运营的出租车总数量是固定不变的；

假设 6 出租车的行驶路线与乘客的出行需求在特定区域的道路网中是稳定存在的。

四、符号说明及术语解释

符号	解释说明
I	出租车乘客出发点的集合
J	出租车乘客目的地的集合
Φ	所有 O-D 出行路线的集合
\tilde{C}_{ijt}	从出发地 i 到目的地 j 的打车费用， $\tilde{C}_{ijt} = [c_{ijt}^L, c_{ijt}^U]$
\tilde{t}_0	出租车司机接单后到达乘客所在地的时间， $\tilde{t}_0 = [t_0^L, t_0^U]$
\tilde{F}_{ijt}^1	乘客从出发地 i 到目的地 j 选择路边招手打车的出行总支出， $\tilde{F}_{ijt}^1 = [f_{ijt}^{1L}, f_{ijt}^{1U}]$
\tilde{F}_{ijt}^2	乘客从出发地 i 到目的地 j 选择使用打车软件的出行总支出， $\tilde{F}_{ijt}^2 = [f_{ijt}^{2L}, f_{ijt}^{2U}]$

\tilde{S}'_{ijt}	在出发地 i 和目的地 j 之间的载客出租车流量， $\tilde{S}'_{ijt} = [s'^L_{ijt}, s'^U_{ijt}]$
\tilde{S}^1_{kit}	从 k 地区到 i 地区的路上等待接客的的空车数量， $\tilde{S}^1_{kit} = [s^{1L}_{kit}, s^{1U}_{kit}] (k \in J, i \in I)$
\tilde{S}^2_{kijt}	从 k 地区到 i 地区使用打车软件寻找到 j 地区乘客的空车数量， $\tilde{S}^2_{kijt} = [s^{2L}_{kijt}, s^{2U}_{kijt}] (k \in J, i \in I, j \in J)$
\tilde{V}^1_{kit}	从 k 地区到 i 地区的路上等待接客的的空车的机会成本， $\tilde{V}^1_{kit} = [v^{1L}_{kit}, v^{1U}_{kit}]$
\tilde{V}^2_{kijt}	从 k 地区到 i 地区使用打车软件寻找到 j 地区乘客的空车的机会成本， $\tilde{V}^2_{kijt} = [v^{2L}_{kijt}, v^{2U}_{kijt}]$
\tilde{M}^1_{kt}	从 k 地区出发路边寻找乘客的空车总数， $\tilde{M}^1_{kt} = [m^{1L}_{kt}, m^{1U}_{kt}]$
\tilde{M}^2_{kt}	从 k 地区出发使用打车软件寻找乘客的空车总数， $\tilde{M}^2_{kt} = [m^{2L}_{kt}, m^{2U}_{kt}]$
$(\bar{x}_{qt}, \bar{y}_{qt})$	t 时刻第 q 类乘客类中心的坐标
$(\tilde{x}_{pqt}, \tilde{y}_{pqt})$	t 时刻第 q 类乘客中第 p 个乘客的位置坐标， $\tilde{x}_{pqt} = [x^L_{pqt}, x^U_{pqt}]$ ， $\tilde{y}_{pqt} = [y^L_{pqt}, y^U_{pqt}]$
d_{qst}	t 时刻第 q 类乘客类中心到第 s 类出租车类中心的距离
\tilde{h}_{qt}	t 时刻第 q 类乘客的人数， $\tilde{h}_{qt} = [h^L_{qt}, h^U_{qt}]$
\hat{h}_{qst}	t 时刻离第 q 类乘客类中心最近的第 s 类出租车的数量
\tilde{t}_{mn}	乘客乘车从第 m 类出租车类到第 n 类出租车类的时间， $\tilde{t}_{mn} = [t^L_{mn}, t^U_{mn}]$

五、模型建立及求解

由于全国的道路网错综复杂，人口规模大，不便于全面系统的研究全国各地不同时间的出租车供给量和乘客需求量。因此为了简化出租车运营系统，我们特意选取了中国大陆经济最发达的城市上海市 9 月 8 日 24 小时内的出租车分布、打车需求量等数据。为了区分高峰时期与非高峰时期，我们选择 7:00—9:00、16:00—18:00、20:00—22:00 三个时间段内出租车分布与打车订单的分布情况，

使用 K 均值聚类算法进行聚类分析。然后以出租车在 OD 区域内空车数量、空车的总代价之和、乘客打车总成本之和为指标来衡量上海区域出租车资源的供求关系，并构建模糊多目标规划模型。为了求解模糊多目标规划模型，将模糊多目标规划模型转化为模糊单目标规划模型，给出了基于 $C-OWA$ 算子的去模糊化处理方法和模糊权重确定模型，最后通过求解单目标规划模型分析上海市出租车资源供求匹配程度。

5.1 数据收集

根据苍穹滴滴快的智能数据平台提供的上海地区各个路段每天的打车订单、出租车分布、抢单时间、出行轨迹、打车难易度的数据，再利用 *gooseker* 软件抓取苍穹数据平台上显示的 24 小时内上海各个路段打车需求量、出租车分布的数据，然后结合由数据堂网站提供的部分数据，可以得到 9 月 8 日这天上海市各个地区打车的需求量以及出租车供给量的分布，但因为 GPS 的存在精确度问题，所以，本文中的打车需求量均用区间数表示。例如： \tilde{D}_{ijt}^1 是在 $[d_{ijt}^{1L}, d_{ijt}^{1U}]$ 上的区间数，表示从出发地 i 到目的地 j 路边招手打车的出租车需求量。 \tilde{D}_{ijt}^2 是在 $[d_{ijt}^{2L}, d_{ijt}^{2U}]$ 上的区间数，表示从出发地 i 到目的地 j 使用打车软件的出租车需求量。

为了对相关区间指标进行处理，本文利用连续区间有序加权平均 (COWA) 算子来进行集成。

定义 5.1.1 $C-OWA$ 算子是与 BUM 函数有关的一个映射 $F: \Omega^+ \rightarrow R^+$

$$F_Q(\tilde{a}) = \int_0^1 \frac{dQ(y)}{dy} (a^p - y(a^p - a^L)) dy$$

Ω^+ 是一个闭区间且下界为正数， R^+ 是正实数区间， $[a^L, a^p] \in \Omega^+$ 。

定理 5.1.1 设 $\tilde{a} = [a^L, a^U] \in \Omega^+$ ，若 $\lambda = \int_0^1 Q(y) dy$ 为态度参数，则

$$F_Q(\tilde{a}) = (1 - \lambda)a^L + \lambda a^U.$$

由定理 4.3.1 可知， $F_Q(\tilde{a}_{ij})$ 可以看成区间数 \tilde{a} 的两个端点的凸组合形式。

对于区间数指标，可以利用 COWA 算子将它转化为含参变量的实数形式。为方便起见，令 $\lambda = 0.5$ 。

5.2 基于 K 均值聚类的不同时空出租车资源供给与需求的匹配

K 均值算法以 K 为参数，将 n 个对象分为 K 簇，使簇内的数据具有较高的相似度，而不同簇之间的数据对象之间具有较高的相异度。

由 9 月 8 日上海地区使用滴滴快的软件的乘客需求量与司机供给量数据，我们将聚类分析方法应用于划分不同地区的乘客与出租车司机，便于了解他们的分布情况，从而进一步分析不同地区的需求量与供给量之间的联系与区别。同时，为了区别上班高峰期与非高峰期，我们特意选取了 7:00—9:00、16:00—18:00、20:00—22:00 这三个时间段内上海地区打车的乘客需求量与出租车供给量数据进行聚类分析。

Step 1 运用 *MATLAB* 进行 K 均值聚类

根据先验经验，我们不妨假设聚类参数 $K = 5$ 。

- (1) 输入 K 以及 2 个小时内的打车需求量进行 K 均值聚类分析，输出 5 个簇反映了上海 5 个地区打车需求量的不同分布
- (2) 输入 K 以及 2 个小时内的出租车供给量进行 K 均值聚类分析，输出 5 个簇反映了上海 5 个地区出租车资源供给的不同分布
- (3) 画出图像来形象地反映不同区域需求量与供给量的分布，二维图像如下所示：

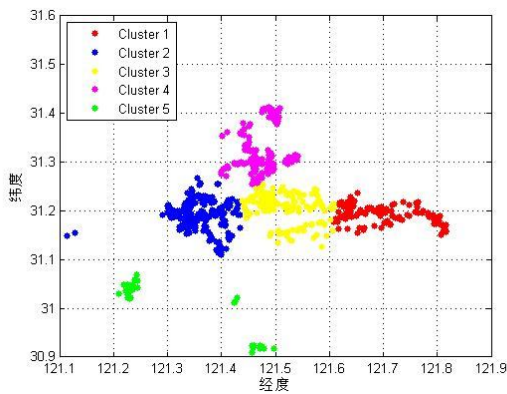


图 1 7:00—9:00 出租车分布情况

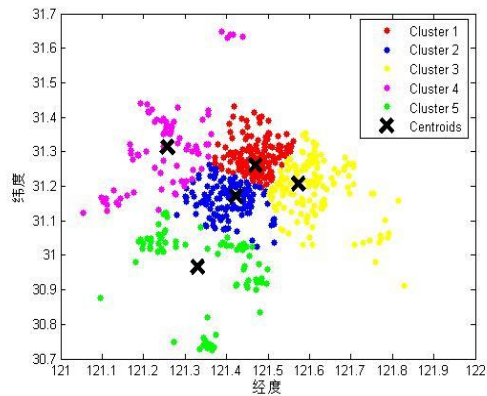


图 2 7:00—9:00 打车订单分布情况

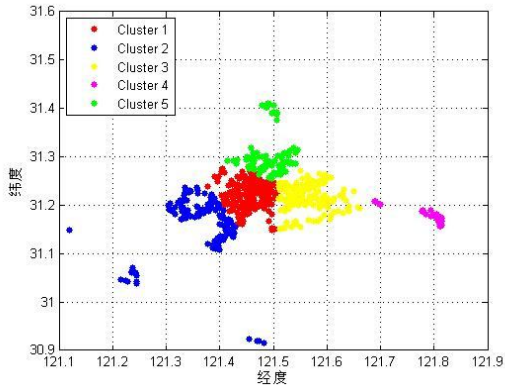


图 3 16:00—18:00 出租车分布情况

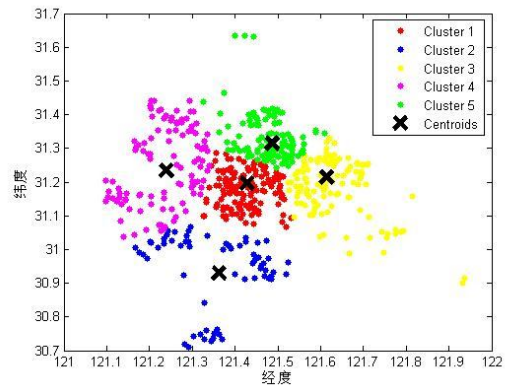


图 4 16:00—18:00 打车订单分布情况

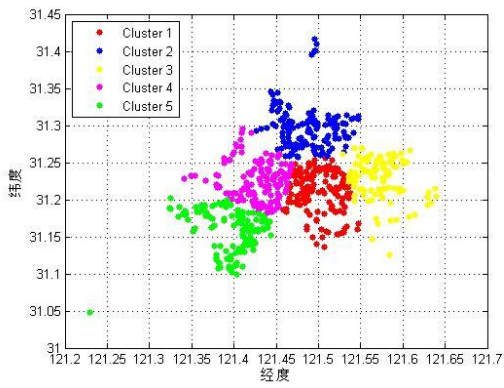


图 5 20:00—22:00 出租车分布情况

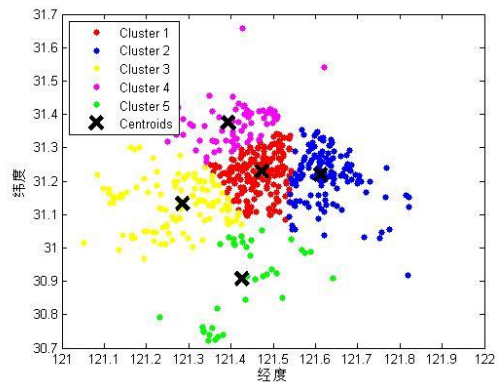


图 6 20:00—22:00 打车订单分布情况

三维图像如下所示:

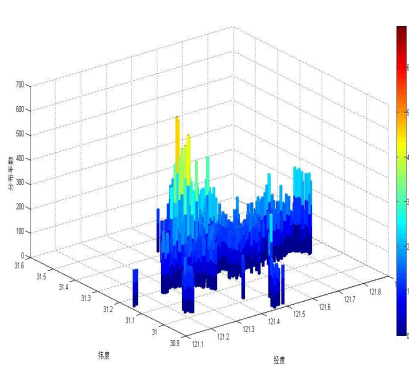


图 7 7:00—9:00 出租车分布情况

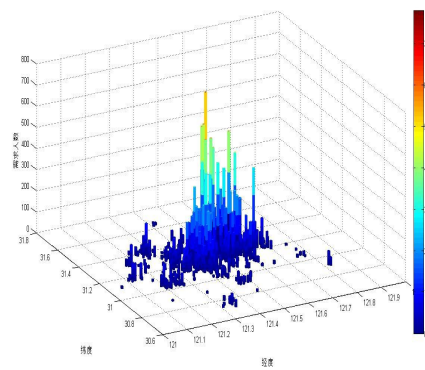


图 8 7:00—9:00 打车订单分布情况

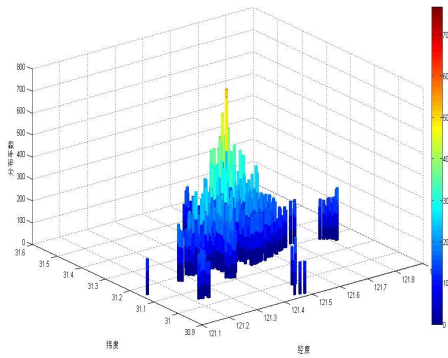


图 9 16:00—18:00 出租车分布情况

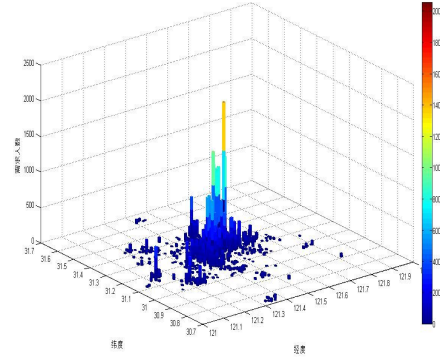


图 10 16:00—18:00 打车订单分布情况

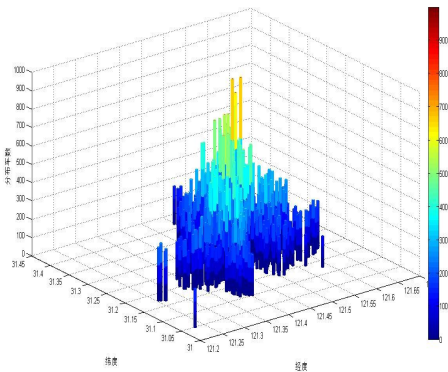


图 11 20:00—22:00 出租车分布情况

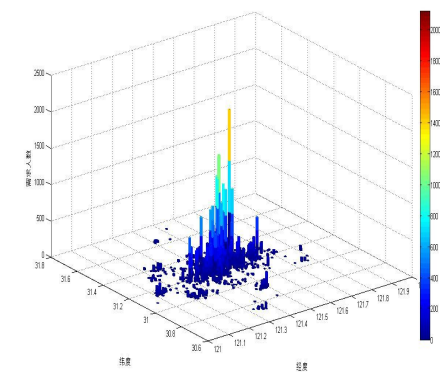


图 12 20:00—22:00 打车订单分布情况

Step 2 聚类结果分析

(1) 我们将图 1-图 6 中的 6 个图聚类的结果与上海市地图匹配，可以将上海市划分为 I、II、III、IV、V 一共五个地区。区域 I 代表了上海西北部地区包括嘉定区和青浦区以及崇明县，区域 II 代表了上海北部地区如宝山区，区域 III 代表了上海市中心区域，包括徐汇区、静安区等地，区域 IV 代表了上海东部地区如浦东新区，区域 V 代表了上海南部地区。

(2) 从图 2 中 7:00—9:00 出租车分布情况的聚类图可以很容易的看出出租车的分布比较集中，而且呈现出多数集中于市中心的这一分布特点。而同一时间段 7:00—9:00 打车订单分布的聚类图则较为分散，分布在上海市各个地区。从 16:00—18:00 出租车分布情况的聚类图可以看出出租车的分布也是较为集中，而同一时间段 16:00—18:00 打车的订单分布情况的聚类图则呈现出较为分散的特点。同理，从 20:00—22:00 出租车分布情况的聚类图可以看出出租车的分布相对于上下班高峰期 7:00—9:00 和 16:00—18:00 这两个时间段的出租车分布则呈现出相对分散的特点，而同一时间段内打车订单的分布也呈现出分散的特点，但我

们还是会发现这一时间段打车订单的分布还是比出租车的分布更为分散。

(3)从图 7-图 12 的三维聚类图中我们可以很清楚的看到数量的分布以及集中趋势，但是由于坐标轴尺度的不同，直观的数量对比存在一定的误差。因为在出租车分布图中z轴的坐标范围大致为[0,700],在打车订单分布图中z轴的坐标范围大致在[0, 1000]区域内，所以从这点我们也可以看出上海市在上下班高峰期出租车资源处于供不应求的状态。另外，从图 8-图 13 的三组三维图片对比中我们也不难发现打车订单的分布较出租车分布更为分散，在一些远离市中心的地区打车的需求量也很多然而出租车的分布却很少。

(4)很显然，从以上的分析中我们得知这样的出租车分布必然会导致 7:00-9:00, 16:00-18:00, 20:00-22:00 这三个时间段内上海市出租车资源供求不匹配。另外从这三个时间段内的打车订单数与出租车的分布之间的不均衡也影射出整个上海市出租车资源供求不平衡的现状。

5.3 问题一的分析与求解

5.3.1 基本分析

问题一中要求建立合理的指标，并运用指标对不同时空的出租车资源供求匹配程度进行分析。

随着人民生活水平的提高，信息技术的飞跃式发展，人们通常会选择打出租车的方式来减少他们自己认为的出行成本，所以我们将出行的乘客划分为使用打车软件按照传统模式打车的和使用打车软件“叫车”的两部分。

我们假定有一个稳定的上海的道路网，在上海市交通区域内运营的出租车数量是固定不变的，而乘客的行程服从 $O-D$ 出行需求，并且出租车的行驶路线与乘客的出行需求在上海市道路网中是稳定存在的。首先我们应该找到供需平衡下的平衡点，即所有出行乘客的需求量与运营的出租车的供给量相等，考虑并分析有哪些变量可以影响或衡量出租车资源的供给量、需求量以及供求匹配程度。从乘客的角度出发，乘客的车费、等待的时间和乘车时间都可以影响到乘客对于出租车的需求。车费越高、等待时间与乘车时间越长，乘客对于出租车的需求越低，由于时间无法量化，我们运用了价值转换系数 $a \times t + b$ 和 π 将乘客的等待时间和乘车时间转换为一种和车费一样的成本。考虑到时间具有价值且随着等车时间的

延长，时间的价值越大，我们用一次线性函数作为一种刻画价值的刻度。同时乘车时间是必须要付出的，所以我们用常数 π 作为转换系数。从出租车的角度出发，出租车的空车率以及空车等待时间都可以来衡量出租车的供给量，空车率越高，空车等待时间越长就可以反映出出租车供给的剩余缺口越大。由于模型中假定上海市出租车总量为 N 且固定不变，所以空车率可以用空车的总数与 N 的比值来衡量。针对空车的等待时间可以跟乘客乘车时间做同样的处理，用常数 σ 来把时间转化成空车等待的代价。针对这三个指标，我们运用了模型 1 里的基于 $C-OWA$ 算子的模糊权重确定模型来确定三个指标的相对重要性权重，最后构造出一个总指标来衡量上海市出租车资源匹配程度。

5.3.2 建立指标

(1) 乘客打车成本

在所有 $O-D$ 路线的集合里从出发点 i 到目的地 j ，乘客使用打车软件与不使用打车软件在街上打车的全程费用，分别用 \tilde{F}_{ij}^1 和 \tilde{F}_{ij}^2 表示成如下形式：

$$F_Q(\tilde{F}_{ij}^1) = F_Q(\tilde{C}_{ij}) + (a \times t + b) \times T_i^1 + \pi \times t_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \Phi \quad (1)$$

$$F_Q(\tilde{F}_{ij}^2) = F_Q(\tilde{C}_{ij}) + (a \times t + b) \times (T_{ij}^2 + F_Q(\tilde{t}_0)) + \pi \times t_{ij} - g_{ij}(t), \quad \forall (i, j) \in \Phi \quad (2)$$

其中 $a \times t + b$ 和 π 分别是乘客等待出租车和在出租车上所花费时间的价值系数；更精确地说， T_i^1 表示 i 地区乘客选择路边招手打车的平均等车时间， T_{ij}^2 表示出租车司机通过打车软件确认服务之前所需要的时间，即出租车司机的抢单时间； \tilde{t}_0 表示出租车司机通过打车软件确认服务之后到他到达乘客所在位置所需的时间。 $g_{ij}(t)$ 表示打车软件对乘客的补贴。

上述方程意味着乘客的全程费用由乘坐出租车的费用、候车时间成本和出租车上所花费的时间成本构成。

(2) 出租车需求量

乘客通过打车软件叫出租车从出发地 $i \in I$ 到达目的地 $j \in J$ 的概率可以通过 Logit 模型计算得出：

$$\frac{F_Q(\tilde{D}_{ijt}^2)}{F_Q(\tilde{D}_{ijt}^1) + F_Q(\tilde{D}_{ijt}^2)} = \frac{\exp(-\alpha_1 F_Q(\tilde{F}_{ijt}^2))}{\exp(-\alpha_1 F_Q(\tilde{F}_{ijt}^1)) + \exp(-\alpha_1 F_Q(\tilde{F}_{ijt}^2))}, \quad \forall (i, j) \in \Phi. \quad (3)$$

易见 α_1 是一个非负参数。 \tilde{D}_{ijt}^1 和 \tilde{D}_{ijt}^2 表示乘客在两种打车方式下对出租车的需求，从单个乘客的角度看， α_1 的值反映了乘客的出租车需求及出租车服务的不确定性程度。

由上述说明知： $F_Q(\tilde{D}_{ijt}^1) + F_Q(\tilde{D}_{ijt}^2) = F_Q(\tilde{R}_{ijt})$ ，则使用打车软件与不使用打车软件时的出租车需求量分别为：

$$F_Q(\tilde{D}_{ijt}^1) = \frac{F_Q(\tilde{R}_{ijt}) \times \exp\{-\alpha_1(F_Q(\tilde{C}_{ijt}) + (a \times t + b) \times T_i^1 + \pi t_{ij})\}}{\exp\{-\alpha_1(F_Q(\tilde{C}_{ijt}) + (a \times t + b) \times T_i^1 + \pi t_{ij})\} + \exp\{-\alpha_1(F_Q(\tilde{C}_{ijt}) + (a \times t + b)(T_{ij}^2 + F_Q(\tilde{t}_0)) + \pi t_{ij} - g_{ij}(t))\}},$$

$$\forall (i, j) \in \Phi \quad (4)$$

$$F_Q(\tilde{D}_{ijt}^2) = \frac{F_Q(\tilde{R}_{ijt}) \times \exp\{-\alpha_1(F_Q(\tilde{C}_{ijt}) + (a \times t + b)(T_{ij}^2 + F_Q(\tilde{t}_0)) + \pi t_{ij} - g_{ij}(t))\}}{\exp\{-\alpha_1(F_Q(\tilde{C}_{ijt}) + (a \times t + b) \times T_i^1 + \pi t_{ij})\} + \exp\{-\alpha_1(F_Q(\tilde{C}_{ijt}) + (a \times t + b)(T_{ij}^2 + F_Q(\tilde{t}_0)) + \pi t_{ij} - g_{ij}(t))\}},$$

$$\forall (i, j) \in \Phi \quad (5)$$

(3) 运营出租车总量

考虑在一个固定的出租车总量为 N 状态下的一个单位周期内，所有出租车载客的时间为 $\sum_{i,j \in \Phi} F_Q(\tilde{S}'_{ijt}) t_{ij}$ ， \tilde{S}'_{ijt} 为在出发地 i 和目的地 j 之间的载客出租车流量。出租车司机可以利用打车软件得到附近需要搭乘的乘客信息。不失一般性，我们假设在打车软件的使用中，某个地区乘客的乘车请求信息只发送到同一地区流通的出租车。因此，未被占用的出租车总时间为：

$$\sum_{i \in I, k \in J} F_Q(\tilde{S}'_{kit})(t_{ki} + w_i^1) + \sum_{k \in J, (i,j) \in \Phi} F_Q(\tilde{S}''_{kijt})(t_{ki} + w_{ij}^2 + F_Q(\tilde{t}_0))$$

即总的未被占用的出租车时间包括从上一个乘客的目的地到下一个乘客的出发地的时间以及遇见下一个客户之前等待的时间。考虑到载客和空车行驶的时间总和应等于总的出租车服务时间，因此，对所考虑的一个单位周期 N ，我们有下面的出租车服务时间条件：

$$\sum_{i,j \in \Phi} F_Q(\tilde{S}'_{ijt}) t_{ij} + \left\{ \sum_{i \in I, k \in J} F_Q(\tilde{S}'_{kit}) \times (t_{ki} + w_i^1) + \sum_{k \in J, (i,j) \in \Phi} F_Q(\tilde{S}''_{kijt}) (t_{ki} + w_{ij}^2 + F_Q(\tilde{t}_0)) \right\} = N$$

(6)

(4) 空车负效用

一旦成为空车状态，出租车将决定在何处以及如何寻找他们的下一个乘客来尽量减少他们的空车负效用，这个负效用取决于空车时间和负的净营收。具体来说，我们通过以下函数来表示空车司机耗费的时间成本以及负的净营收（此处的净营收是一个机会成本概念，即为如果出租车处于载客状态应该得到的营业收入）：

$$F_Q(\tilde{V}_{kit}^1) = -F_Q(\tilde{C}_{it}^1) + \sigma(w_i^1 + t_{ki} + F_Q(\tilde{t}_i^1)) - F_Q(y_i^1), \quad \forall k \in J, i \in I \quad (7)$$

$$F_Q(\tilde{V}_{kijt}^2) = -F_Q(\tilde{C}_{ijt}^1) + \sigma(w_{ij}^2 + t_{ki} + t_{ij} + F_Q(\tilde{t}_0)) - y_j - f_{ij}(t), \quad \forall k \in J, (i, j) \in \Phi \quad (8)$$

其中 \tilde{C}_{ijt}^1 表示出租车收入平均值：

$$F_Q(\tilde{C}_{ijt}^1) = \frac{\sum_{j,(i,j) \in \Phi} F_Q(\tilde{C}_{ijt}^1) F_Q(\tilde{D}_{ijt}^1)}{\sum_{j,(i,j) \in \Phi} F_Q(\tilde{D}_{ijt}^1)}$$

\tilde{t}_i^1 表示占据出租车在 i 地区寻找乘客的时间：

$$F_Q(\tilde{t}_i^1) = \frac{\sum_{j,(i,j) \in \Phi} t_{ij} F_Q(\tilde{D}_{ijt}^1)}{\sum_{j,(i,j) \in \Phi} F_Q(\tilde{D}_{ijt}^1)}$$

y_i^1 是空车司机在 i 地区接客所放弃的其他地区的平均收益，表示为：

$$F_Q(y_i^1) = \frac{\sum_{j,(i,j) \in \Phi} y_j F_Q(\tilde{D}_{ijt}^1)}{\sum_{j,(i,j) \in \Phi} F_Q(\tilde{D}_{ijt}^1)}$$

y_j 为空车司机在 j 地区通过打车软件到其他地区接客所放弃的在 j 地区的收益。

鉴于上述负效用函数，空车司机选择去哪里寻求下一个乘客的决定是由在街道上搜索下一个乘客和通过打车软件之间的选择所决定的。此外，由于出租车司机他们性格各异和所获取的信息不同，他们的空车负效用值往往有所不同，因此我们假定空车司机的选择行为可以通过分层 *Logit* 模型来确定。

(5) 空车数量

我们用 $\sum_{k \in J} \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_4} \right) F_Q(\tilde{M}_{kt}^2) (\ln F_Q(\tilde{M}_{kt}^2) - 1) + \sum_{k \in J} \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_3} \right) F_Q(\tilde{M}_{kt}^1) (\ln F_Q(\tilde{M}_{kt}^1) - 1)$

来表示使用打车软件与不使用打车软件的空车数量之和。

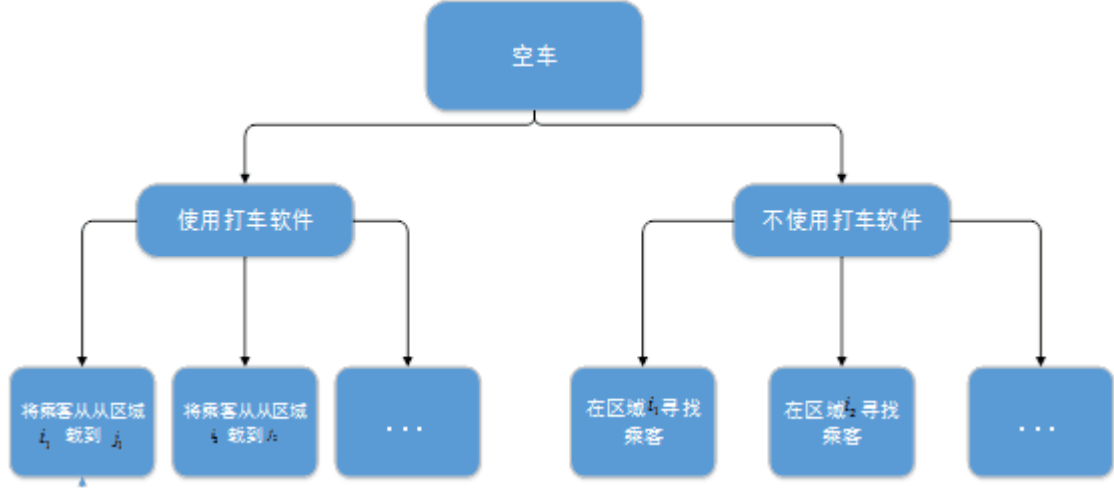


图 13 空车的分层选择模型

使用打车软件的空车通过打车软件找到在 i 区域的乘客并将其载到 j 区域，而不使用打车软件的空车只能不断在 i 区域寻找乘客。

设 \tilde{M}_{kt}^1 为从 k 地区出发在街道上寻找乘客的空车总数， \tilde{M}_{kt}^2 则表示从 k 地区出发使用打车软件寻找乘客的空车总数。基于上述定义，对于 \tilde{M}_{kt}^1 和 \tilde{M}_{kt}^2 我们有下列等式：

$$F_Q(\tilde{M}_{kt}^1) = \sum_{i \in I} F_Q(\tilde{S}_{kit}^1), \quad \forall k \in J \quad (9)$$

$$F_Q(\tilde{M}_{kt}^2) = \sum_{(i,j) \in \Phi} F_Q(\tilde{S}_{kijt}^2), \quad \forall k \in J \quad (10)$$

$$\sum_{i, (i,k) \in \Phi} F_Q(\tilde{S}_{ijt}^1) = F_Q(\tilde{M}_{kt}^1) + F_Q(\tilde{M}_{kt}^2), \quad \forall k \in J \quad (11)$$

(11) 式表明对于给定的一小时，出租车在某一特定区域内完成的服务数量应该等于空车从该区域离开的数目。

从 k 地区出发的空车司机通过打车软件寻找下一个乘客的可能性通过 Logit 模型给出：

$$\frac{F_Q(\tilde{M}_{kt}^2)}{F_Q(\tilde{M}_{kt}^1) + F_Q(\tilde{M}_{kt}^2)} = \frac{\exp(-\alpha_2 F_Q(\tilde{H}_{kt}^2))}{\exp(-\alpha_2 F_Q(\tilde{H}_{kt}^2)) + \exp(-\alpha_2 F_Q(\tilde{H}_{kt}^1))}, \quad \forall k \in J \quad (12)$$

考虑从 k 地区出发的空车司机选择在街道上寻找下一个乘客，则该司机选择 i 地区来寻找乘客的可能性可表示为：

$$\frac{F_Q(\tilde{S}_{kit}^1)}{F_Q(\tilde{M}_{kt}^1)} = \frac{\exp(-\alpha_3 F_Q(\tilde{V}_{kit}^1))}{\sum_{i \in I} \exp(-\alpha_3 F_Q(\tilde{V}_{kit}^1))}, \quad \forall i \in I \quad (13)$$

考虑从 k 地区出发的空车司机选择使用打车软件寻找下一个乘客，则该司机驱车前往 i 地区等待到 j 地区乘客的可能性可表示为：

$$\frac{F_Q(\tilde{S}_{kijt}^2)}{F_Q(\tilde{M}_{kt}^2)} = \frac{\exp(-\alpha_4 F_Q(\tilde{V}_{kijt}^2))}{\sum_{(i,j) \in \Phi} \exp(-\alpha_4 F_Q(\tilde{V}_{kijt}^2))}, \quad \forall (i,j) \in \Phi \quad (14)$$

其中 α_2 为上层 *Logit* 模型的分散系数； α_4 和 α_3 分别为下层 *Logit* 模型中出租车司机选择使用打车软件与不使用打车软件的分散系数。在 (12) 式中，引入 \tilde{H}_{kt}^1 描述从 k 地区出发的空车司机选择在街道上寻找乘客的负效用，在这里我们运用信息熵的形式来表示这种负效应。信息熵的形式可以很好的反映出整体效率，对于离散型随机变量 X ，设其分布为 $\left[\frac{X}{P(X)} \right] = \left[\frac{x_1}{p_1} \frac{x_2}{p_2} \dots \frac{x_n}{p_n} \right]$ ， $0 < p_i < 1, \sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1$

X 的信息熵则可定义为“加权平均信息熵”， $H_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n+1} p_i \ln p_i$

所以这种负效用的表达式为：

$$F_Q(\tilde{H}_{kt}^1) = -\left(\frac{1}{\alpha_3}\right) \ln \sum_i \exp(-\alpha_3 F_Q(\tilde{V}_{kit}^1)),$$

同时引入 \tilde{H}_{kt}^2 描述从 k 地区出发的空车司机选择使用打车软件寻找乘客的负效用，表达式为：

$$F_Q(\tilde{H}_{kt}^2) = -\left(\frac{1}{\alpha_4}\right) \ln \sum_{(i,j) \in \Phi} \exp(-\alpha_4 F_Q(\tilde{V}_{kijt}^2)),$$

注意到分层 *Logit* 模型的一致性使得分散系数必须满足 $\alpha_3 \gg \alpha_2$ 且 $\alpha_4 \gg \alpha_2$ 。在一个动态平衡系统中，空车的移动应与所有地区的出租车需求相符，无论乘客选择何种打车方式，每个乘客在等待足够时间后都能够得到服务，即

$$\sum_{k \in J} F_Q(\tilde{S}_{kit}^1) = \sum_{j, (i,j) \in \Phi} F_Q(\tilde{D}_{ijt}^1), \quad \forall i \in I \quad (15)$$

$$\sum_{k \in J} F_Q(\tilde{S}_{kijt}^2) = F_Q(\tilde{D}_{ijt}^2), \quad \forall (i,j) \in \Phi \quad (16)$$

考虑在街道上乘客和出租车司机的相互需求，在 *Cobb–Douglas* 型生产函数的基础上建立等车时间函数如下：

$$F_Q(\tilde{T}_i^1) = (P_i)^{-\frac{1}{\beta_1}} \left(\sum_{j, (i,j) \in \Phi} F_Q(\tilde{D}_{ijt}^1) \right)^{\frac{1-\beta_1}{\beta_1}} \left(\sum_{k \in J} F_Q(\tilde{S}_{kit}^1) w_i^1 \right)^{-\frac{\beta_2}{\beta_1}}, \quad \forall i \in I \quad (17)$$

式中 β_1 、 β_2 为按照未接受服务的乘客数量和空车数量得到的相遇概率弹性系数。

易见 $0 < \beta_1 \leq 1$ 且 $0 < \beta_2 \leq 1$ ； P_i 为 i 地区的参数。

$$\text{特别地，当 } \beta_1 = \beta_2 = 1 \text{ 时， } F_Q(\tilde{T}_i^1) = \frac{1}{\sum_{k \in J} F_Q(\tilde{S}_{kit}^1) w_i^1 P_i},$$

一般来说，很难有充足时间等待乘客与出租车司机自然相遇，更进一步地说，使用打车软件增大了双方相遇的可能性。类似地，我们得到在使用打车软件的情况下出租车司机的抢单时间函数：

$$F_Q(\tilde{T}_{ij}^2) = (\bar{P})^{-\frac{1}{\beta_1}} \left(F_Q(\tilde{D}_{ijt}^2) \right)^{\frac{1-\beta_1}{\beta_1}} \left(\sum_{k \in J} F_Q(\tilde{S}_{kijt}^2) w_{ij}^2 \right)^{-\frac{\beta_2}{\beta_1}}, \quad \forall (i, j) \in \Phi \quad (18)$$

其中 \bar{P} 表示通过打车软件双方相遇的概率系数。

假定每位乘客与出租车司机是相互独立的，并且没有市场调节机制的影响，则出租车市场达到服务供给与服务需求相匹配的静止平衡状态：

$$F_Q(\tilde{S}_{ijt}^1) = F_Q(\tilde{D}_{ijt}^1) + F_Q(\tilde{D}_{ijt}^2), \quad \forall (i, j) \in \Phi \quad (19)$$

5.3.3 模型建立

定义集合 $\tilde{Y} = \{(\dots, \tilde{D}_{ijt}^1, \dots, \tilde{D}_{ijt}^2, \dots) \mid \tilde{D}_{ijt}^1 + \tilde{D}_{ijt}^2 = \tilde{R}_{ijt}, \forall (i, j) \in \Phi; \tilde{D}_{ijt}^1, \tilde{D}_{ijt}^2 \geq 0\}$ ，任取

$(\dots, \tilde{D}_{ijt}^1, \dots, \tilde{D}_{ijt}^2, \dots) \in \tilde{Y}$ ，考虑目标函数：

$$\min F_Q(\tilde{z}_1) = \sum_{k \in J} \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_4} \right) F_Q(\tilde{M}_{kt}^2) (\ln F_Q(\tilde{M}_{kt}^2) - 1) + \sum_{k \in J} \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_3} \right) F_Q(\tilde{M}_{kt}^1) (\ln F_Q(\tilde{M}_{kt}^1) - 1),$$

\tilde{z}_1 是以上文中叙述的信息熵形式表示的使用打车软件与不使用打车软件时的空车数量之和。一般而言，当 $O-D$ 区域内总的空车数量最少时，供需就会达到一个相对的平衡状态。

$$\min F_Q(\tilde{z}_2) = \sum_{(i,j) \in \Phi, k \in J} \frac{1}{\alpha_4} F_Q(\tilde{S}_{kijt}^2) (\ln F_Q(\tilde{S}_{kijt}^2) - 1) + \sum_{i \in I, k \in J} \frac{1}{\alpha_3} F_Q(\tilde{S}_{kit}^1) (\ln F_Q(\tilde{S}_{kit}^1) - 1),$$

\tilde{z}_2 是使用打车软件与不使用打车软件时对于空车司机而言的空车代价之和，这里的空车代价是指空车的负收益（即前文中提出的机会成本）以及用空车等待时间

衡量的一种时间价值，（7）式与（8）式中我们使用了价值系数 σ 来把空车时间转换成价值。这个指标对于整体目标——供求匹配程度来说自然是越小越好。

$$\begin{aligned} \min F_Q(\tilde{z}_3) = & \sum_{(i,j) \in \Phi, k \in J} F_Q(\tilde{S}_{kijt}^2)[-F_Q(\tilde{C}_{ijt}) + \sigma(t_{ki} + t_{ij} + F_Q(\tilde{t}_0)) - y_j] + \sum_{k \in J, i \in I} F_Q(\tilde{S}_{kit}^1)[-F_Q(\tilde{C}_{it}) + \sigma(t_{ki} + F_Q(\tilde{t}_i))] \\ & - \sum_{(i,j) \in \Phi} \frac{1}{\alpha_5} F_Q(\tilde{F}_{ijt}^1) \ln(F_Q(\tilde{F}_{ijt}^1) - 1) + \sum_{(i,j) \in \Phi} \frac{1}{\alpha_6} F_Q(\tilde{F}_{ijt}^2) \ln(F_Q(\tilde{F}_{ijt}^1) - 1), \end{aligned}$$

\tilde{z}_3 是使用打车软件与不使用打车软件时对于乘客而言的总成本之和，这里的总成本包括打车的费用，乘客候车时间的价值以及乘客坐在出租车上到达目的地的时间价值之和。由（1）式与（2）式中的价值转换系数 $a \times t + b$ 和 π ，我们可以把乘客的等待时间转换为成本。乘客打车的总成本越小，供求匹配程度越大。为了求解多目标规划问题，本文提出基于COWA算子的权重确定模型，将多目标规划转化为单目标规划。

定义 5.3.1 若矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n \times n}$ ， $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij}^L, a_{ij}^U]$ ，则称 \tilde{A} 为区间数判断矩阵。

定义 5.3.2 若区间数判断矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n \times n}$ 满足 $a_{ij}^L + a_{ji}^U = a_{ij}^U + a_{ji}^L = 1$ ， $i, j \in N$ 。

$a_{ii}^U = a_{ii}^L = 0.5, i \in N$ ，则称 \tilde{A} 为区间数互补判断矩阵。

基于算子的权重确定模型：

Step1 设 $Y = \{Y1, Y2, Y3\}$ 为决策指标集，决策者给出的决策矩阵为区间数互补判断矩阵

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{3 \times 3} \quad \tilde{a}_{ij} = [a_{ij}^L, a_{ij}^U], \quad \tilde{a}_{ji} = [a_{ji}^L, a_{ji}^U],$$

$$a_{ij}^L + a_{ji}^U = a_{ij}^U + a_{ji}^L = 1, \quad a_{ij}^U \geq a_{ji}^L > 0, a_{ii}^U = a_{ii}^L = 0.5, i, j \in N.$$

Step2 根据COWA算子，得到 $F_Q(\tilde{A}) = F_Q(\tilde{a}_{ij})_{3 \times 3}$ ，这里

$$F_Q(\tilde{a}_{ij}) = F_Q([a_{ij}^L, a_{ij}^U]) = (1 - \lambda)a_{ij}^L + \lambda a_{ij}^U$$

$$F_Q(\tilde{a}_{ji}) = (1 - \lambda)a_{ji}^L + \lambda a_{ji}^U, i \leq j$$

λ 为BUM函数， $\lambda = \int_0^1 Q(y) dy$ 为态度参数。

$$\text{Step3 由} \quad \tilde{w}_i = \frac{\sum_{j=1}^3 F_Q(\tilde{a}_{ij})}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_Q(\tilde{a}_{ij})}, \quad i=1,2,3 \quad (5.1)$$

计算第 i 个指标的相对重要性权重

考虑上述三个指标——空载率、空车的等待代价、乘客的打车成本，构建区间数互补判断矩阵：

$$\begin{pmatrix} [0.5, 0.5] & [0.7, 0.8] & [0.6, 0.8] \\ [0.2, 0.3] & [0.5, 0.5] & [0.3, 0.4] \\ [0.2, 0.4] & [0.6, 0.7] & [0.5, 0.5] \end{pmatrix},$$

由(5.1)计算需集成的各个指标的相对重要性权重如下：

$$\tilde{w} = ([0.3673, 0.5122], [0.2041, 0.2927], [0.2653, 0.3902]).$$

故可建立约束条件求解使供求匹配程度达到最大的时候的空车的数量、出租车等待时间以及乘客候车时间的单目标优化模型

$$\min F_Q(\tilde{z}) = \min(w_1 F_Q(\tilde{z}_1) + w_2 F_Q(\tilde{z}_2) + w_3 F_Q(\tilde{z}_3))$$

约束条件为

$$(9), (10), (15), (16)$$

$$F_Q(\tilde{M}_{kt}^1) + F_Q(\tilde{M}_{kt}^2) = \sum_{i, (i,k) \in \Phi} (F_Q(\tilde{D}_{ikt}^1) + F_Q(\tilde{D}_{ikt}^2)), \quad \forall k \in J \quad (20)$$

式(20)由式(11)和式(19)得到。注意到当 $(\dots, \tilde{D}_{ijt}^1, \dots, \tilde{D}_{ijt}^2, \dots)$ 固定不变， \tilde{C}_{it} 和 \tilde{t}_i' 为定值。由于 $\alpha_3 \gg \alpha_2$ 且 $\alpha_4 \gg \alpha_2$ ，故目标函数为凸线性规划函数。则约束条件改为：

$$(9), (10), (15), (16), (20)$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_3} \right) \ln F_Q(\tilde{M}_{kt}^1) - m_k + r_k = 0, \quad \forall k \in J \quad (21)$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_4} \right) \ln F_Q(\tilde{M}_{kt}^2) - n_k + r_k = 0, \quad \forall k \in J \quad (22)$$

$$\frac{1}{\alpha_4} \ln F_Q(\tilde{S}_{kijt}^2) + [-F_Q(\tilde{C}_{ijt}) + \sigma(t_{ki} + t_{ij} + F_Q(\tilde{t}_0)) - y_j] + q_{ij} + n_k = 0, \quad \forall k \in J, (i, j) \in \Phi \quad (23)$$

$$\frac{1}{\alpha_3} \ln F_Q(\tilde{S}_{kit}^1) + [-F_Q(\tilde{C}_{it}) + \sigma(t_{ki} + F_Q(\tilde{t}_i')) - F_Q(\tilde{y}_i')] + p_i + m_k = 0, \quad \forall k \in J, i \in I \quad (24)$$

其中 m_k 为约束 (9) 的拉格朗日乘子, n_k 为约束 (10) 的拉格朗日乘子, p_i 为约束 (15) 的拉格朗日乘子, q_{ij} 为约束 (16) 的拉格朗日乘子, r_k 为约束 (20) 的拉格朗日乘子。

5.3.4 模型求解

Step1 指标分析

首先,我们构造了 3 个指标——出租车在 OD 区域内空车率、空车的总代价、乘客的总成本为指标来衡量上海区域出租车资源的供求关系。而由 4.4.2 的模型准备过程中空车率使用空车的数量与运营出租车的总量 N 的比值来确定的,而空车的总代价是以出租车的等待时间为自变量构造的函数得出的,乘客的总成本也是以乘客的等待时间为自变量建立的函数得出的。所以在下文的供求关系分析中,我们直接以空车率、空车等待时间、乘客等待时间为指标来衡量 24 小时内上海市 5 个区域的供求匹配程度。

Step2 结果分析

为了能更直观形象用指标分析供求匹配程度,我们用图片的形式将模型结果表现出来,结果如下图:

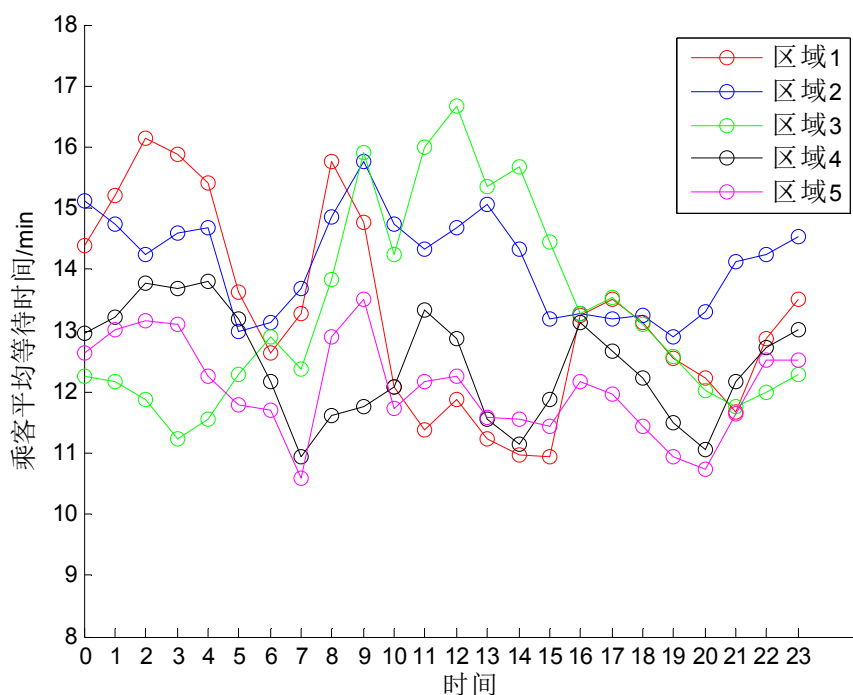


图 14 各区域乘客 24 小时内平均等待时间分布

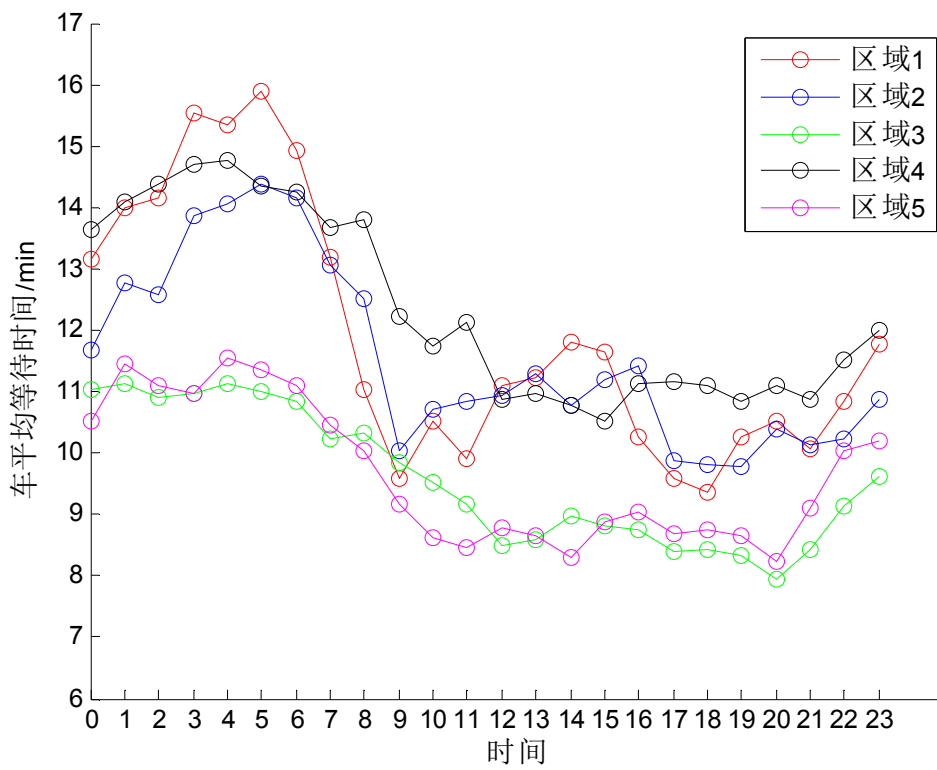


图 15 各区域空车 24 小时平均等待时间

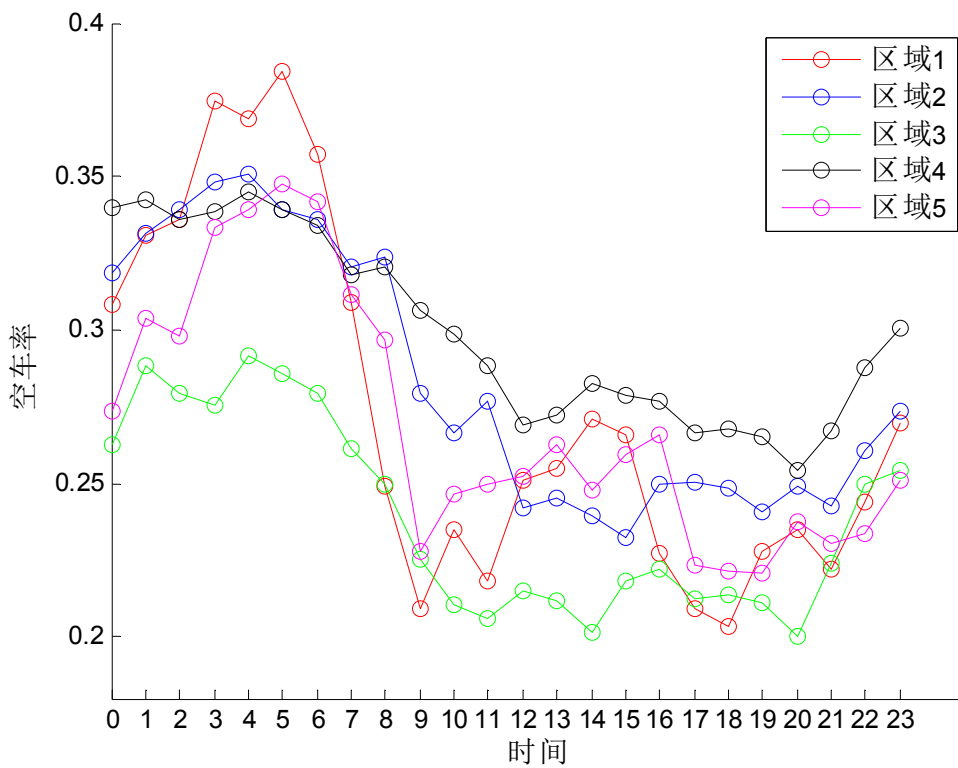


图 16 各区域 24 小时内的空车率

(1) 基于乘客平均等待时间这一指标, 从图 14 可以看出在不同时空有着不同的

乘客平均等待时间。其中区域 I、II、III、IV、V 在 7:00-9:00 这段时间内乘客平均等待时间逐渐减小，这说明了出租车资源的供求匹配程度相对也越来越低；在 16:00-18:00 这段时间内区域 I、II、III、IV、V 的乘客平均等待时间逐渐减小，其中区域 I、III、IV、V 的乘客平均等待时间变化速率相对较快，总体上反映出出租车资源的供求匹配相对也越来越均衡；在 20:00-22:00 这段时间内区域 I、II、III、IV、V 的乘客平均等待时间整体上是区域逐渐增大的，这说明了出租车资源供求匹配程度逐渐在减小。

(2) 基于出租车平均等待时间这一指标，从图 15 可以看出在不同时空有着不同的出租车平均等待时间。在 7:00-9:00 这段时间内区域 I、II、III、IV、V 的出租车平均等待时间逐渐减小，这说明了出租车资源的供求匹配程度相对越来越高；在 16:00-18:00 这段时间内区域 I、II、III、IV、V 与 7:00-9:00 这一时间段内的出租车平均等待时间有着相同的变化趋势，这说明了出租车资源的供求匹配程度相对越来越高；区域 I、II、III、IV、V 在 20:00-22:00 出租车的平均等待时间逐渐增大，这反映出出租车资源供求匹配程度逐渐在减小。

(3) 基于出租车空车率这一指标，从图 16 可以看出在不同时空有着不同出租车空车率。在 7:00-9:00 这段时间内区域 I、II、III、IV、V 的出租车空车率逐渐减小，这说明了出租车资源的供求匹配程度相对越来越高；在 16:00-18:00 这段时间内区域 I、II、III、IV、V 的出租车空车率的变化趋势是逐渐减小，这说明了出租车资源的供求匹配程度相对越来越高；区域 I、II、III、IV、V 在 20:00-22:00 出租车的空车率逐渐增大，这反映出出租车资源供求匹配程度逐渐在减小。

(4) 基于上面的分析，我们发现——在不同的时间内，这三项指标在不同的时空的变化趋势基本上是相同的。这也更加说明了乘客平均等待时间、出租车平均等待时间、出租车空车率这三个指标的有效性，即它们都能够很好的衡量出租车资源供求匹配程度的高低。

5.4 针对问题二的分析与求解

5.4.1 问题分析

问题二中要求分析各公司的出租车补贴方案是否对“缓解打车难”有帮助。

为了打破传统打车方式的市场格局和限制，近年来，中国手机打车软件市场逐步兴起，尤其在前两年，手机打车软件的使用呈爆发式增长，软件的覆盖领域

也遍布全国。打车软件的使用减少了乘客与出租车司机之间相遇的不确定程度，降低了打车难度。对于需要打车的人即乘客来说，使用打车软件明显降低了乘客的等待时间，同时极大方便了偏远地区乘客的出行；对于出租车司机来说，运营过程中的空车率显著降低，而出租车司机的拒载行为也在一定程度上得到控制。在此基础上，一些打车软件公司相继成立，其市场份额在逐步减少，各公司不得不提出相应的补贴方案来缓解竞争压力。滴滴和快的等打车软件通过天价补贴，如用户返现、打车代金券抵现、通过企业冠名方式给用户发红包，并对司机接单进行奖励等形式补贴。补贴方案的出台增加了乘客与出租车司机双方的利益，充分调动了乘客和司机的积极性，使得打车软件一度成为人们钟爱的打车方式。考虑到滴滴快的打车软件的市场占有率，我们选取滴滴快的打车软件公司的补贴政策为代表，从车辆等待时间、乘客等待时间、空车率三方面对不同的补贴方案进行分析。

5.4.2 问题求解

针对不同打车状况，各个打车软件公司制定出不同的补贴政策，我们以滴滴快的打车软件为例，对有无补贴方案以及不同补贴政策下的出租车市场供求关系进行分析，下面选取车辆等待时间、乘客等待时间以及空车率作为反映供求关系的指标，从而将抽象的问题简单化。

表 1 滴滴打车软件公司的补贴政策

1月10日	乘客车费立减10元，司机立奖10元
2月17日	乘客返现10-15元，新司机首单立奖50元
2月18日	乘客返现12至20元
3月7日	乘客每单减免随机“6-15元”
3月23日	乘客返现3-5元
5月17日	乘客补贴“归零”
7月9日	司机补贴降为2元/单
8月12日	取消司机接单的常规补贴

表 2 快的打车软件公司的补贴政策

1月20日	乘客车费返现10元，司机奖励10元
2月17日	乘客返现11元，司机返5-11元
2月18日	乘客返现13元
3月4日	乘客返现10元/单，司机端补贴不变
3月5日	乘客补贴金额变为5元
3月22日	乘客返现3-5元
5月17日	乘客补贴“归零”
7月9日	司机补贴降为2元/单
8月9日	取消司机现金补贴

综合考虑两公司的补贴政策，对补贴方案出台前后、不同补贴政策下的车辆等待时间、乘客等待时间、空车率进行统计分析，得到相应曲线图形如下：

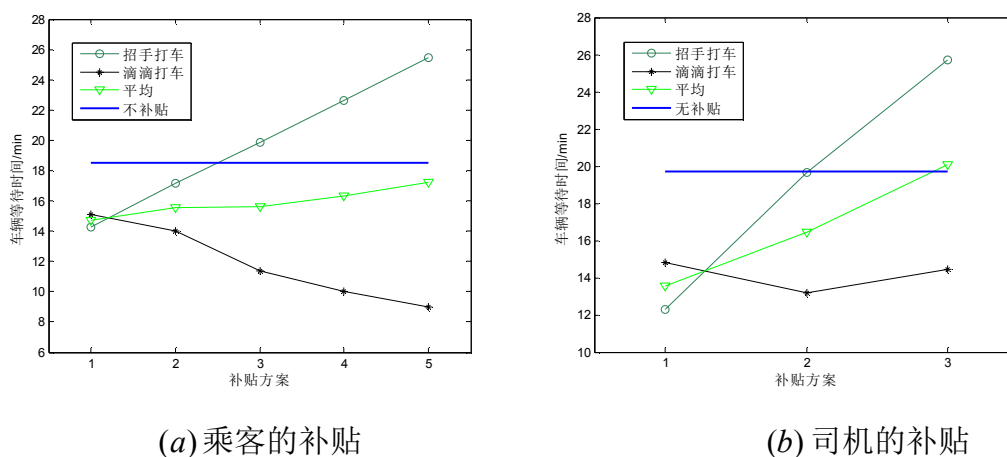


图 17 车辆等待时间

(a)图表示对乘客的补贴中，补贴方案1为对乘客补贴为零；补贴方案2为每单返现3-5元；补贴方案3为每单随机减免6-15元；补贴方案4为返现10-20元；补贴方案5为每单车费立减10元。

(b)图表示对司机的补贴中，补贴方案1为补贴2元；补贴方案2为补贴5元；补贴方案3为补贴10元。

由图17不难看出，随着双方补贴的增加，更多乘客和司机选择使用打车软件叫车，则出租车司机的接客率增大，相应的车辆等待时间逐渐减少；同时，打车软件的使用使得在街道上招手打车的乘客数量减少，那么不使用打车软件的出租车司机接客难度加大，相应的车辆等待时间随之增大。但是，在使用打车软件

的情况下，无论哪种补贴方案，车辆等待时间总是少于没有补贴时的车辆等待时间。

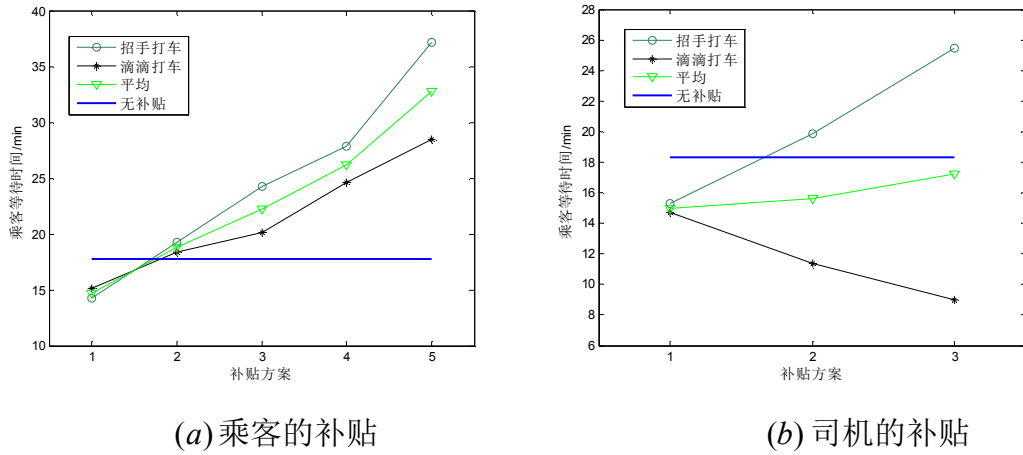


图 18 乘客等待时间

由图 18(a)可知，在选择使用打车软件的前提下，补贴较少时的乘客等待时间少于无补贴时的乘客等待时间，随着对乘客补贴程度的加大，更多乘客使用打车软件叫车，而此时的出租车空车数量是一定的，则出租车的供给小于需求，随之而来，乘客的等待时间增加，并高于没有补贴时的乘客等待时间。同理，没有使用打车软件的乘客因为大部分空置出租车已接单，需要等待的时间更长。另一方面，在图 18(b)中，对出租车司机的补贴增加促使更多司机选择使用打车软件接客，乘客使用打车软件选择的余地更大，等待时间随之减少；而选择招手打车的乘客相当于排在使用软件的乘客之后，等待时间加长。

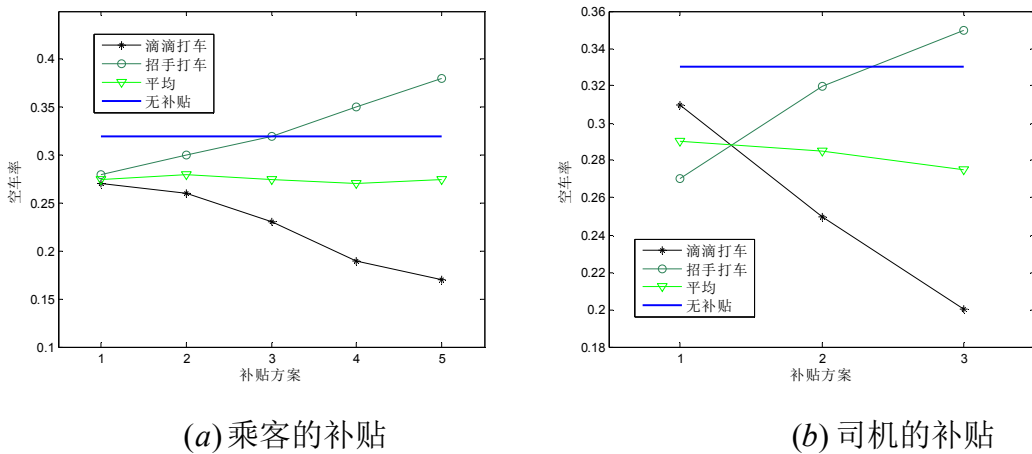


图 19 空车率

由图 19(a)可得，对乘客补贴的增加刺激更多乘客选择使用打车软件打车，

则出租车司机的载客率增加，相应地空车率减少，而由于出租车系统是静态平衡系统，那么选择招手打车时的空车率随之增加。在图 19(b) 中，当给出出租车司机的补贴增加时，司机使用打车软件接客的利益增大，司机的工作积极性提高，空车率降低；然而，在补贴过少时，出租车司机认为使用打车软件并不能增加收益，因此，他们更愿意选择在街道上寻找乘客，则选择在街道上寻找乘客的出租车更多，相应地载客率更高，即空车率更低。

综合上述分析可知，在使用打车软件的情况下，从车辆等待时间、乘客等待时间以及空车率三个角度来看，无论选择哪种补贴方案，都能在一定程度上缓解“打车难”问题。

5.5 问题三模型的建立与求解

5.5.1 基本分析

在问题一中，我们讨论了出租车资源的供求匹配，在问题二中，我们分析了补贴方案对出租车资源供求匹配的影响。对于问题三，在某一固定区域内，我们就供求关系分情况讨论，对最优补贴函数进行定性分析。

当人多车多时，双方的需求易达到平衡，可以没有补贴政策；当人多车少时，乘客打车难度增加，可以对出租车司机进行补贴，鼓励其他地区出租车来到该地；当人少车多时，容易出现出租车资源浪费，此时不需要对该地出租车司机进行补贴；当人少车少时，双方的需求难以满足，此时只需对双方加以引导，不需要进行补贴。

基于上述分析，我们对不同类中出租车与乘客的供求关系进行定量分析，以此建立最优补贴函数。

5.5.2 模型建立

Step1 对出租车与乘客的供求关系进行定量分析

由于 GPS 定位的精确性问题，乘客的位置存在模糊性，现假定 $(\tilde{x}_{pqt}, \tilde{y}_{pqt})$ 表示在 t 时刻按照乘客的乘车需求划分的第 q 区中的第 p 个乘客的方位， (u_{st}, v_{st}) 表示在 t 时刻按照出租车的供给划分的第 s 区的中心坐标，则有

$$d_{pqst} = \sqrt{(F_Q(\tilde{x}_{pqt}) - u_{st})^2 + (F_Q(\tilde{y}_{pqt}) - v_{st})^2}, \quad (25)$$

式中 d_{pqst} 为在 t 时刻第 q 区中第 p 个乘客到第 s 区中心的距离，为调动第 s 区出租车司机到第 q 区，给司机的补贴应相应增加。

假设 $(\bar{x}_{qt}, \bar{y}_{qt})$ 为在 t 时刻按照乘客的乘车需求划分的第 q 区的中心坐标，那么在 t 时刻第 q 区中心到第 s 区中心的距离可表示为

$$d_{qst} = \sqrt{(\bar{x}_{qt} - u_{st})^2 + (\bar{y}_{qt} - v_{st})^2}, \quad (26)$$

令 $\hat{d}_{qt} = \min_s d_{qst}$ ，则 \hat{d}_{qt} 为在 t 时刻第 q 区中心到按照出租车的供给划分的所有类中心的最短距离，以此来衡量第 q 区乘客的打车难易度， \hat{d}_{qt} 越大，第 q 区越偏僻，乘客打车难度越大，给出租车司机的补贴越多。

Step2 确定供求匹配度

以 \tilde{h}_{qt} 表示在 t 时刻第 q 区乘客的人数，可看作在 t 时刻第 q 区的出租车需求量；以 \hat{h}_{qst} 表示在 t 时刻离第 q 区中心最近的第 s 区出租车的数量，也就是在 t 时刻第 s 区出租车的供给量，那么在 t 时刻出租车的供求匹配度可记为

$$\tilde{l}_{qst} = \frac{\tilde{h}_{qt}}{\hat{h}_{qst}}, \quad (27)$$

取阈值 $\alpha (\alpha > 0)$ ，只有当 $F_Q(\tilde{l}_{qst}) \geq \alpha$ 时，发放补贴能够缓解出租车资源供求不平衡问题，否则不予发放。

Step3 确定最优补贴函数

为提高出租车的供求匹配度，避免不必要的出租车资源的浪费，应适当地对出租车司机和乘客进行补贴。随着 d_{pqst} 及 \hat{d}_{qt} 的增大，打车难度增加，出租车司机到该地的意愿减小，补贴随之增大。 \tilde{t}_{mn} 表示从第 m 区乘客类出发，乘坐出租车到达第 n 区出租车类所消耗的时间， \tilde{t}_{mn} 越大，出租车司机接单次数越少，应加大补贴来补偿司机的损失。则出租车司机的补贴函数可表示为

$$f_{pqst} = \lambda_{1t} F_Q(\tilde{t}_{mn}) + \lambda_{2t} d_{pqst} + \lambda_{3t} \hat{d}_{qt}, \quad (28)$$

另一方面，随着 \tilde{h}_{qt} 的增加，乘客的出租车需求增大，路边招手打车的难度增加，选择打车软件的乘客数量增多，对乘客的补贴随之减小，那么乘客的补贴函数可记为

$$g_{pqst} = \lambda_{4t} e^{-F_Q(\tilde{h}_{qt})}, \quad (29)$$

5.5.3 模型求解

Step1 指标分析

鉴于同一时间段上，某一乘客类的总人数、乘客类中心与出租车类中心的距离、

乘客乘车从第 m 类出租车类到第 n 类出租车类的时间以及乘客类中心到其他出租车类中心的最短距离是固定不变的, 我们选取不同时间段上各个参数的变化来反映补贴方案。

Step2 结果分析

通过对一天中不同时间段的不同系数的变化情况进行统计分析, 得到如下图像:

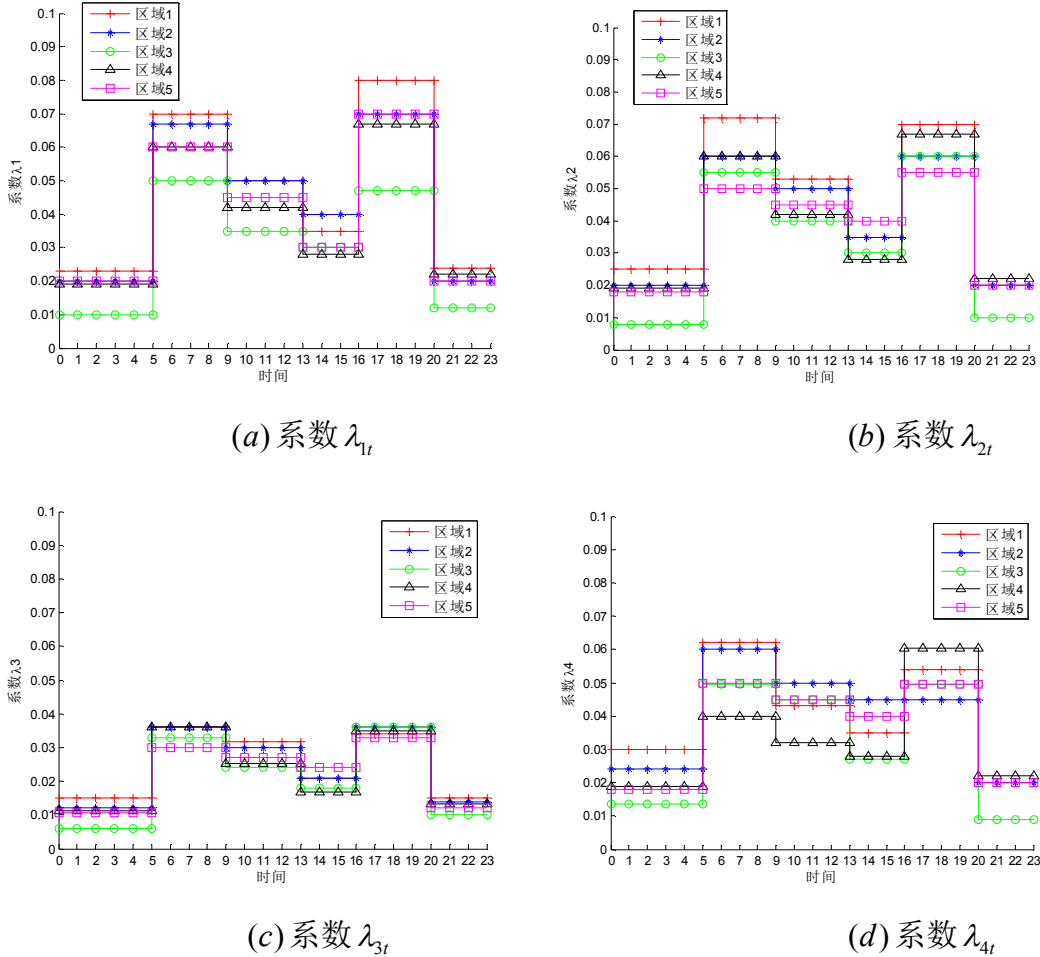


图 20 一天内补贴函数系数随时间变化图

由图 20 可知, 在一天中的 5:00-9:00 以及 16:00-20:00 时间段内各系数达到高峰。由生活经验可知, 5:00-9:00 为上班高峰期, 16:00-20:00 为下班高峰期, 道路交通拥堵, 乘客乘坐出租车所消耗的时间增加, 给予乘客的补贴应增大, 与此同时出租车司机接单次数减少, 收益降低, 给予司机的补贴也相应增加。由于区域 I 较为偏僻, 出租车资源较少, 为鼓励其他区域出租车前往该区域, 系数普遍相对较高; 而区域 III 地处市中心, 出租车资源较多, 系数普遍相对较低。

5.5.4 合理性分析

我们从供求匹配的三个衡量指标, 即空车等待时间、乘客等待时间、出租车空车率出发, 验证该补贴模型的合理性。令 $f_{ij}(t) = f_{pqst}$, 将式 (28) 代入式 (8) 得到空

车司机等待的成本

$$F_Q(\tilde{V}_{kijt}^2) = -F_Q(\tilde{C}_{ijt}) + \sigma(w_{ij}^2 + t_{ki} + t_{ij} + F_Q(\tilde{t}_0)) - y_j - (\lambda_{1t}F_Q(\tilde{t}_{mn}) + \lambda_{2t}d_{pqst} + \lambda_{3t}\hat{d}_{qt}), \quad (30)$$

令 $g_{ij}(t) = g_{pqt}$ ，将式(29)代入式(2)得到乘客等待的成本

$$F_Q(\tilde{F}_{ijt}^2) = F_Q(\tilde{C}_{ijt}) + (a \times t + b) \times (T_{ij}^2 + F_Q(\tilde{t}_0)) + \pi \times t_{ij} - \lambda_{4t}e^{-F_Q(\tilde{t}_{qt})}, \quad (31)$$

由于时间与成本成正比，我们考虑空车司机等待成本及乘客等待成本代替空车等待时间和乘客等待时间，以此验证模型的合理性。

由模型一计算可得到不同时间段各个区域的 4 个补贴系数、乘客平均等车时间、出租车平均空载时间以及出租车平均空载率，我们对这些数据进行统计分析得到图形如下：

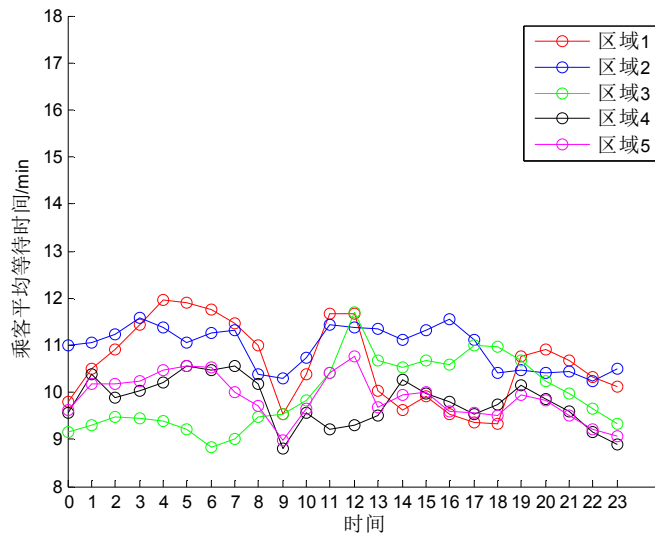


图 21 新的补贴方案下不同时刻乘客等待时间变化图

比较图 21 与未给予补贴时的乘客等待时间变化图（如图 14），不难发现，在新的补贴方案下各区域、各时间段的乘客等待时间较未补贴之前总体呈下降趋势，且各区域、各时间段的乘客等待时间分布较均匀。

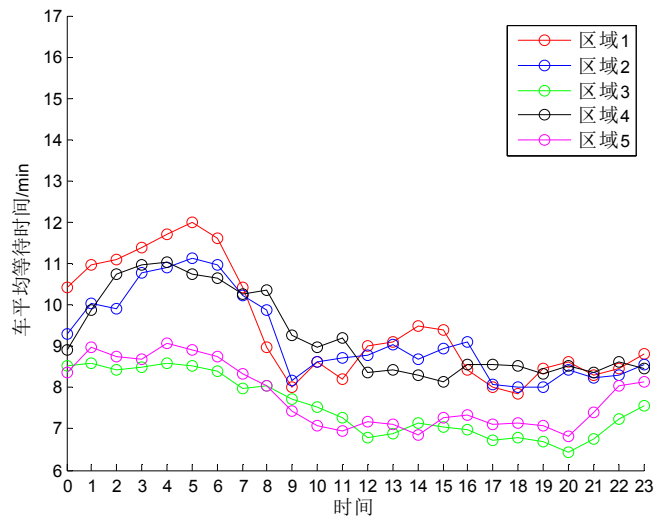


图 22 新的补贴方案下不同时刻空车等待时间变化图

将图 22 与未给予补贴时的空车等待时间变化图（如图 15）作比较，可以看出，实施新的补贴方案后，各区域的空车等待时间峰值有所下降，同一区域不同时间段的空车等待时间变化较平缓，但高峰所在时间段保持不变。

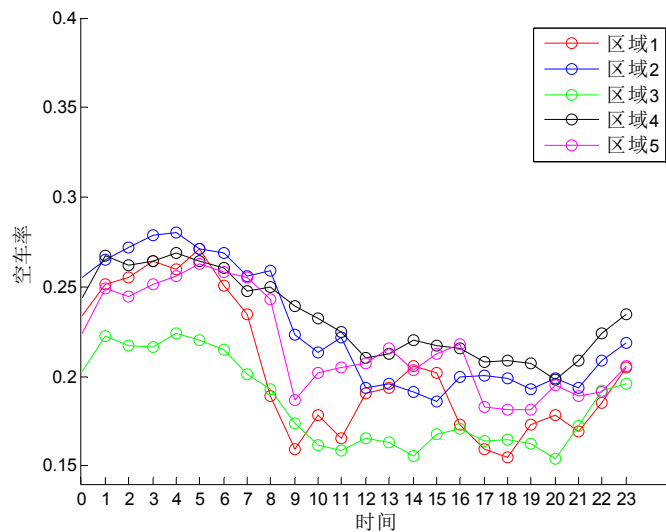


图 23 新的补贴方案下不同时刻空车率变化图

比较图 23 与未给予补贴时的空车率变化图（如图 16），易见，实行新的补贴方案后，各区域的出租车空载率峰值有所下降，极差明显减小。

综合以上分析可知，在新的补贴方案下，乘客等待时间、空车等待时间、出租车空载率三个指标均有所下降，且波动幅度减小，反映在实际情况中表现为新的补贴方案使得更多乘客和司机选择使用打车软件，尤其在高峰期内，双方的需求满足程度得到提高，出租车资源得到合理利用，即验证了新的补贴模型的

合理性。

六、灵敏度分析

我们通过灵敏度分析，刻画模型中的某些参数对新的补贴方案参数的影响。由于本论文涉及到的参数较多，且文章篇幅有限，此处我们仅考虑问题三中 λ 以及 α 对优化结果的影响。

由问题一可知， $\lambda = \int_0^1 Q(y)dy, \lambda \in (0,1)$ 为态度参数，在问题三中的 $F_Q(\tilde{t}_{mn}) = (1-\lambda)t_{mn}^L + \lambda t_{mn}^U$ 和 $F_Q(\tilde{h}_{qt}) = (1-\lambda)h_{qt}^L + \lambda h_{qt}^U$ 是基于态度参数 λ 每个终止点的算术平均值，那么 f_{pqst} 及 g_{pqst} 是关于 λ 的函数。同时，优化结果还受阈值 $\alpha (\alpha > 0)$ 的影响，只有当 $F_Q(\tilde{l}_{qst}) \geq \alpha$ 时，发放补贴。分别针对乘客等待时间和空车等待时间选取不同的 λ 及 α 得到三维曲线图形如下：

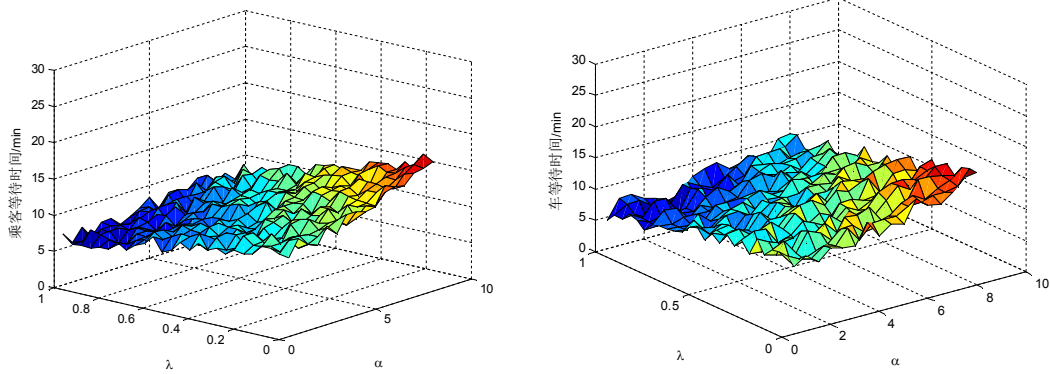


图 24 乘客等待时间随参数 α, λ 变化图 图 25 空车等待时间随参数 α, λ 变化图

由图可见，在 α 一定的情况下，乘客等待时间和空车等待时间随着 λ 的增大而增大；在 λ 一定的情况下，乘客等待时间和空车等待时间也随着 α 的增大而增大。但从增长的趋势而言，在 α 趋向于 8， λ 趋向于 0 时取到最大值，说明此时等待时间达到最大；而在 α 趋向于 0， λ 趋向于 1 时取到最小值，此时等待时间最小。另外，图 24 相对于图 25 要平缓一些，图 25 的波动比较大，说明补贴政策对于司机的影响较大，容易产生变化。

七、模型评价及改进

7.1 模型的优点

(1) 运用信息熵的形式表现空车数量这一指标，信息熵可以很好的反映整体效率。

(2) K 均值聚类方法可以准确的划分上海市出租车资源供给与需求分布区域。

(3) $C-OWA$ 算子可以很好的衡量各个指标间重要程度

7.2 模型的不足

(1) 由于建模前确定部分假设，故误差难以避免。

(2) 模型二运算程序较为复杂，求解时间较长

7.3 模型的改进

(1) 从模型角度，可以通过尝试其他算法模型，从而寻找最佳模型，提高程序的运行速度和模型的准确性。

(2) 考虑其他交通方式的供需匹配情况，如公交车、地铁等，提高本模型的通用性。

参考文献

- [1] 周礼刚，陈华友， $COWA$ 算子的相关定义与定理可参考 广义信息集成算子及其应用[M].科学出版社，2015 年.
- [2]R.R. Yager, .OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B 34 (2004) 1952–1963
- [3] Ortuzar, J.D., Willumsen, L.G., Modelling Transport, second ed. John Wiley & Sons, New York. 1996.
- [4] Yang, H., Leung, C.W.Y., Wong, S.C., Bell, M.G.H., Equilibria of bilateral taxi-customer searching and meeting on networks. Transport. Res. Part B 44, 1067–1083. 2010.
- [5] Douglas, G.W., Price regulation and optimal service standards: the taxicab industry. J. Transport Econ. Policy 6 (2), 116–127. 1972.
- [6] De vany, A.S., Capacity utilization under alternative regulatory constraints: an analysis of taxi markets. J. Polit. Econ. 83 (1), 83–94. 1975.
- [7] Breesley, M.E., Glaister, S., Information for regulation: the case of taxis. Econ. J. 93 (370), 594–615. 1983.
- [8] Cairns, R.D., Liston-Heyes, C., Competition and regulation in the taxi industry. J. Public Econ. 59 (1), 1–15. 1996.

- [9] Yang, H., Ye, M., Tang, W.H., Wong, S.C., Regulating taxi services in the presence of congestion externalities. *Transport. Res. Part A* 39 (1), 17–40. 2005a.
- [10] Yang, H., Ye, M., Tang, W.H., Wong, S.C., A multi-period dynamic model of taxi services with endogenous service intensity. *Oper. Res.* 53 (3), 501–515. 2005b.
- [11] Yang, H., Wong, S.C., A network model of urban taxi services. *Transport. Res. Part B* 32 (4), 235–246, 1998.
- [12] Li-Gang Zhou, Hua-You Chen, Continuous generalized OWA operator and its application to decision making. *Fuzzy Sets Systems*. 168, 18-34, 2011

附件：

程序一：K 均值聚类算法程序

```
clc
clear
clf
B=xlsread('shuju0.xls');
X=[];
[N,P]=size(B);
for i=1:N
    for j=1:B(i,3)
        X=[X;B(i,1:2)];
    end
end
opts = statset('Display','final');
[Idx,Ctrs,SumD,D] = kmeans(X,5,'Replicates',5,'Options',opts);
plot(X(Idx==1,1),X(Idx==1,2),'r.','MarkerSize',14)
hold on
plot(X(Idx==2,1),X(Idx==2,2),'b.','MarkerSize',14)
hold on
plot(X(Idx==3,1),X(Idx==3,2),'y.','MarkerSize',14)
hold on
plot(X(Idx==4,1),X(Idx==4,2),'m.','MarkerSize',14)
hold on
plot(X(Idx==5,1),X(Idx==5,2),'g.','MarkerSize',14)

legend('Cluster 1','Cluster 2','Cluster 3','Cluster 4','Cluster 5','Location','NW')
grid on

Ctrs
SumD
```

程序二：聚类三维柱状图

```
function scat(x,y,z,scale)

x = x(:);
y = y(:);
z = z(:);
n = min([numel(x) numel(y) numel(z)]);
x = x(1:n);
y = y(1:n);
z = z(1:n);
```



```

rx = range(x);
ry = range(y);
dx = abs(diff(x));
dx = min(dx(dx>0));
dy = abs(diff(y));
dy = min(dy(dy>0));

if nargin == 3
    if ~isempty(dx)
        hx = dx/2;
    else
        hx = 0.5;
    end
    if ~isempty(dy)
        hy = dy/2;
    else
        hy = 0.5;
    end
end

if nargin == 4
    if rx == 0 && ry == 0
        rx = 0.5*scale;
        ry = rx;
    elseif rx == 0 || ry == 0
        rx = max(rx,ry);
        ry = rx;
    end
    hx = rx/scale;
    hy = ry/scale;
end

figure
hold on
Xp = [];
Yp = [];
Zp = [];
for i = 1:n
    [xp,yp,zp] = Vertices(x(i),y(i),z(i));
    Xp = [Xp;xp];
    Yp = [Yp;yp];
    Zp = [Zp;zp];
end

```

```

h = surf(Xp,Yp,Zp,Zp,'FaceColor','flat','edgecolor','none');
colorbar
grid on
view(3)
hold off

function [xp,yp,zp] = Vertices(x,y,z)
    xp = [x-hx x-hx x+hx x+hx x-hx
          x-hx x-hx x+hx x+hx x-hx
          x-hx x-hx x+hx x+hx x-hx
          x-hx x-hx x+hx x+hx x-hx
          x      x      x      x      x
          NaN NaN NaN NaN NaN];
    yp = [y-hy y+hy y+hy y-hy y-hy
          y-hy y+hy y+hy y-hy y-hy
          y-hy y+hy y+hy y-hy y-hy
          y-hy y+hy y+hy y-hy y-hy
          y      y      y      y      y
          NaN NaN NaN NaN NaN];
    zp = [ repmat(linspace(0,z,4)',[1,5]);
          z z z z z;NaN NaN NaN NaN NaN];
end
end

x=xlsread('shuju1.xls');
y=xlsread('shuju1.xls');
z=xlsread('shuju1.xls');
scale=200;
scat(x,y,z,scale);

```

程序三：多目标优化模型求解

```

clc
clear all
close all

label = xlsread('D:\MATLAB\R2012b\bin\shuju_0.xlsx');
I = label(1);
J = label(2);

wc1 = sdpvar(I,1);
wc2 = sdpvar(I,J);
wvt1 = sdpvar(I,1);
wvt2 = sdpvar(I,J);

```

```

Lvt1 = sdpvar(J,I);
Lvt2 = sdpvar(J,I,J);
a = xlsread('D:\MATLAB\R2012b\bin\shuju_a.xlsx');
b = xlsread('D:\MATLAB\R2012b\bin\shuju_b.xlsx');
b1 = b(1);b2 = b(2);b3 = b(3);b4 = b(4);
y = zeros(J,1);

z = 5;
pi = 20; pi01 = 20; pi02 = 15;
f1 = 0;
f2 = 0;
N = 36470;
F = xlsread('D:\MATLAB\R2012b\bin\shuju_F.xlsx');
D = xlsread('D:\MATLAB\R2012b\bin\shuju_D.xlsx');

for i = 1:I
    for j = 1:J
        C1(i,j) = F(i,j) + pi01 * wc1(i) + pi02 * t(i,j);
        C2(i,j) = F(i,j) + pi01 * wc2(i,j) + pi02 * t(i,j) + pi02 * z - pi01 * f1;
    end
end
sc1 = D * exp(-b1*C1)./(exp(-b1*C1)+exp(-b1*C2));
sc2 = D * exp(-b1*C2)./(exp(-b1*C1)+exp(-b1*C2));

for k = 1:J
    for i = 1:I
        tt(i) = sum(sc1.* t,2)./sum(sc1,2);
        ff(i) = sum(sc1.* F,2)./sum(sc1,2);
        yy(i) = sum(sc1.* repmat(y,I,1),2)./sum(sc1,2);
        U1(k,i) = -ff(i) + pi * (wvt1(i) + t(k,i) + tt(i)) - yy(i);

        for j = 1:J
            U2(k,i,j) = -F(i,j) + pi * (wvt2(i,j) + t(k,i) + t(i,j) + z) - y(j) - f2;
        end
    end
end

T1_wan(k) = sum(Lvt1,2);
T2_wan(k) = sum(sum(Lvt2,2),3);

const = [sum(Lvt1,2) == sum(sc1,2)];
const = const + [sum(Lvt2,1) == sc2];
const = const + [T1_wan + T2_wan == sum(sc1 + sc2,1)];

```

```

obj = a(1)*((1/b2 - 1/b4) * sum(T2_wan .* log(T2_wan - 1)) + (1/b2 - 1/b3) *
sum(T1_wan .* log(T1_wan - 1)) +...
1/b4 * sum(sum(sum(Lvt2 .* log(Lvt2 - 1)))) + 1/b3 * sum(sum(Lvt1 .* log(Lvt1
- 1)))) + ...
+ a(2) * (sum(sum(U1)) + sum(sum(sum(U2)))) + a(3) * (sum(sum(C1)) +
sum(sum(C2)));

```

```

ops = sdpsettings('solver','cplex','verbose', 2);
result = optimize(const,obj, ops);

```

```

wc1 = double(wc1);
wc2 = double(wc2);
wvt1 = double(wvt1);
wvt2 = double(wvt2);
Lvt1 = double(Lvt1);
Lvt2 = double(Lvt2);

```

程序四：灵敏度分析

```

clear;
clc
x=0.5:0.5:8;
y=0:0.04:1;
z=xlsread('shuju4.xls');
surf(x,y,z);
xlabel('\alpha');
ylabel('\lambda');
zlabel('waiting time/min');

```

程序五：画图程序

```

clear
clf

y1=xlsread('shuju.xls');
y2=xlsread('shuju.xls');
y3=xlsread('shuju.xls');
y4=xlsread('shuju.xls');
y5=xlsread('shuju.xls');
x=0:23;
hold on;
plot(x,y1,'r');

```

```
plot(x,y2,'b');  
plot(x,y3,'g');  
plot(x,y4,'k');  
plot(x,y5,'m');  
xlabel('time');  
ylabel('waiting time/min');  
legend('area1','area2','area3','area4','area5');
```