2017-2018 上学期高等数学期末复习题参考答案

1. A　2. B　3. C　4. B　5. B

6. 3　7. $-\frac{3}{2}$　8. 12　9. $\ln x$　10. $\frac{1}{2}$

11. 解 依题意，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $f(0)=k^2$，

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 4x}{x}=4$$

所以 令 $f(0^-)=f(0)$ 得 $k^2=4$，从而 $k=\pm 2$

2. 解 法 1 原式=$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot[-\frac{1}{2}(\frac{2}{x})^2]=-2$.

法 2 原式=$\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{2}{x}-1)/\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}(-\sin\frac{2}{x})\frac{-2}{x^2}/\frac{-1}{2x^3}$

$$=-\lim_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}/\frac{1}{x}=-2.$$

法 3 原式=$-\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot 2\sin^2\frac{1}{x}=-2\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot(\frac{1}{x})^2=-2$

法 4 令 $t=\frac{1}{x}$，则 $x\to\infty$ 时 $t\to 0$

原式=$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos 2t-1}{t^2}=-2\lim\limits_{t\to 0}\frac{-2\sin 2t}{2t}=-2$.

13. 解 因为 $y'=e^{\sqrt{x}}+xe^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})'=e^{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}e^{\sqrt{x}}$

$$y''=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{4\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{4}e^{\sqrt{x}}$$

所以 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}=y''(1)=e$

14. 解 两端对 x 求导得 $\ln(2y)\cdot\frac{dy}{dx}+\cos x^2=0$

于是 $dy=-\frac{\cos x^2}{\ln(2y)}dx$

15. 解 （1）因为函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 取得极值

所以由 $f'(\dfrac{\pi}{3})=0$ 和 $f'(x)=a\cos x+\cos 3x$ 得

$a\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\pi=0$，解得 $a=2$

（2）因为 $f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$，

$$f''(\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3}<0$$

所以该极值 $f(\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3}$ 为极大值.

16. 解 $\int(\tan^2 x-1)dx=\int(\sec^2 x-2)dx=\int\sec^2 xdx-2\int dx$

$$=\tan x-2x+C.$$

17. 解 原式 $=\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{2x}{\sqrt{8-x^2}}dx-3\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{8-x^2}}dx$

$$=0-6\int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{8-x^2}}dx=-6[\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}]_0^2=-\frac{3}{2}\pi$$

另解 令 $x=2\sqrt{2}\sin t$, $t\in[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$，则

$$\int_{-2}^{2}\frac{2x-3}{\sqrt{8-x^2}}dx=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{4\sqrt{2}\sin t-3}{2\sqrt{2}\cos t}\cdot(2\sqrt{2}\cos t)dt=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(4\sqrt{2}\sin t-3)dt$$

$$=0-2\int_{0}^{\pi/4}3dt=-\frac{\pi}{2}$$

（或 $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(4\sqrt{2}\sin t-3)dt=[-4\sqrt{2}\cos t-3t]_{-\pi/4}^{\pi/4}=-\frac{\pi}{2}$

18. 解 $y=e^{-\int 3dx}(\int 8e^{\int 3dx}dx+C)$

$$=e^{-3x}(\int 8e^{3x}dx+C)=Ce^{-3x}+\frac{8}{3}$$

将 $y|_{x=0}=2$ 代入得 $2=C+\dfrac{8}{3}$，即 $2=C=-\dfrac{2}{3}$

故特解为 $y=\dfrac{2}{3}(4-e^{-3x})$.

注：可用常数变易法求通解.

19．解 交点 $(-4,-12)$、$(1,3)$，取 x 为积分变量.

面积 $A=\int_{-4}^{1}[(4-x^2)-3x]dx$

$$=[4x-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}]_{-4}^{1}=\frac{125}{6}$$

注：取 y 为积分变量类似.

20．解 设水池底半径为 r、高为 h (m)，池壁单位面积造价为 k 元，则总造价为

$$f=3\pi kr^2+2\pi krh$$

由 $\pi r^2h=3000$ 得 $h=\dfrac{3000}{\pi r^2}$，于是

$$f=3\pi kr^2+\frac{6000}{r}k$$

注：其他模型也可.

令 $f'=6\pi kr-\dfrac{6000}{r^2}k=0$ 得唯一驻点 $r=\dfrac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$

由实际问题知该驻点即为问题的最小值点，故蓄水池的尺寸设计为底半径 $r=\dfrac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$、

高 $h=\dfrac{30}{\sqrt[3]{\pi}}$ (m)，亦即高为底半径的 3 倍.

21．证 **法 1** 令 $f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$， $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

则 $f(0)=0$， $f(\dfrac{\pi}{2})=0$，且当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时， $f''(x)=-\sin x<0$.

于是 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的图形是凸的，

从而 $\forall x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$， $f(x)>0$，即 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

法 2 令 $f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$， $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x_0=\arccos\frac{2}{\pi}\in(0,\frac{\pi}{2})$

因为 $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$， $f''(x)=-\sin x<0$，所以

（1）当 $0<x<x_0$ 时 $f'(x)$ 单调减少， $f'(x)>f'(x_0)=0$，从而

$f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上单调增加， $f(x)>f(0)=0$；

（2）当 $x_0<x<\frac{\pi}{2}$ 时 $f'(x)$ 单调减少， $f'(x)<f'(x_0)=0$，从而

$f(x)$ 在 $[x_0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调减少， $f(x)>f(\frac{\pi}{2})=0$.

由（1）与（2）知， $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$， $f(x)>0$，即 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$.